Inducción matemática

A menudo deseamos probar proposiciones de la forma $\forall\, n \in \mathbb{N},\, p(n)$. Por ejemplo:

(1) $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$.

(2) $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $(n-2)^2 = n^2 - 2n + 4$.

(3) $\forall\, n \in \mathbb{N}$, n par implica n^2 par.

Proposiciones (2) y (3) se pueden probar usando la técnica de variable "fija pero arbitraria"que vimos anteriormente (ejercicio para el lector), pero esto no funciona para la proposición (1).

Una razón para esta dificultad es que el lado izquierdo de la igualdad no está en forma cerrada y, por lo tanto, no se puede manipular algebraicamente.

En efecto, aún para entender que significa la expresión del lado izquierdo tenemos que recurrir a una propiedad de los números naturales: Dado un número natural k existe un "siguiente"número natural, que se llama $k+1$.

Así, podríamos esperar que una demostración de (1) involucre esta propiedad "siguiente"de los números naturales.

En efecto, la propiedad de $\mathbb{N}$ a que nos referimos es uno de los cinco postulados de Peano para los números naturales. El lector interesado en los fundamentos axiomáticos de $\mathbb{N}$ puede consultar la bibliografía: E. Landau, Foundations of Analysis, Chelsea, New York, 1951.

Axioma 1 (Principio de inducción matemática) *Sea $S \subseteq \mathbb{N}$ con la propiedad que:*

a) $1 \in S$.

b) $\forall\, k \in \mathbb{R},\ k \in S \longrightarrow k+1 \in S$.

Entonces $S = \mathbb{N}$.

podemos usar el principio de inducción matemática para probar una proposición de la forma $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $p(n)$ haciendo

$$S = \{n \in \mathbb{N} \,:\, p(n) \text{ es verdadera } \}.$$

Así, consideramos que $p(1)$ es verdadero $(1 \in S)$ y $p(k) \longrightarrow p(k+1)$ $(k \in S \longrightarrow k+1 \in S)$ entonces $S = \mathbb{N}$ ó

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\ ,\ p(n).$$

En consecuencia, demostraciones usando el principio de inducción matemática toman la siguiente forma:

a) Mostrar que $p(1)$ es verdadero.

b) Mostrar que $p(k) \longrightarrow p(k+1)$.

Ejemplo: Demostrar que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$.

Aquí $p(n)$ es "$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$". Así $p(1)$ es

$$\text{“}1 = \frac{1}{2}(1)(1+1)\text{”}$$

que es claramente verdadero.

Para completar la inducción se debe demostrar que una cierta implicación $(\forall\, k,\ p(k) \longrightarrow p(k+1))$ es verdadera.

Usaremos nuestro método directo de demostración para esta proposición: Elegimos un número natural k fijo pero arbitrario, asumimos que la hipótesis $(p(k))$ es verdadera y deducimos la validez de la conclusión$(p(k+1))$.

Para comenzar, sea $k \in \mathbb{N}$. Supongamos que $p(k)$ es verdadero, esto es,

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{1}{2}k(k+1).$$

Entonces,

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \cdots + k + k + 1 &= \frac{1}{2}k(k+1) + (k+1) \\ &= (k+1)(\frac{1}{2}k + 1) \\ &= \frac{1}{2}(k+1)(k+2). \end{aligned}$$

Así, $p(k+1)$ es verdadero, lo que completa la demostración.

Ejemplos

a) Si $x \geq 0$ entonces $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $(1+x)^n \geq 1 + x^n$.

Demostración por inducción: Cuando $n = 1$ se tiene $1+x \geq 1+x$ lo cual es verdadero.

Supongamos que $x \geq 0$, $k \in \mathbb{N}$ y $(1+x)^k \geq 1 + x^k$. Entonces

$$\begin{aligned}(1+x)^{k+1} &= (1+x)^k(1+x) \\ &\geq (1+x^k)(1+x) \\ &= 1 + x^{k+1} + x + x^k \\ &\geq 1 + x^{k+1},\end{aligned}$$

lo que completa la demostración.

b) $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $n^2 \leq n$.

Cuando $n = 1$ se tiene $1^2 \leq 1$ lo cual es verdadero.

Supongamos que $k \in \mathbb{N}$ y $k^2 \leq k$. Entonces

$$(k+1)^2 \leq k+1$$

implica

$$k^2 + 2k + 1 \leq k + 1$$

ó

$$k^2 + 2k \leq k$$

lo cual implica

$$k^2 \leq k,$$

que es nuestra hipótesis original, supuesta verdadera. Esto completa la demostración.

Observe lo sorprendente que resulta la proposición anterior.

Ciertamente el resultado anterior es falso, de manera que debe existir algún error en la demostración.

El ejemplo b) muestra un error común que se comete al empezar a manejar el método de inducción.

Un análisis muestra que en la prueba anterior se *asume* la *conclusión* y entonces se obtuvo la hipótesis, una forma de demostración que nunca es válida.

Si todas las las implicaciones pudiesen ser revertidas, se podría construir una demostración válida invirtiendo el orden de los pasos, pero en este caso el último paso no puede ser invertido ($k^2 \leq k$ no implica $k^2 + 2k \leq k$).

El punto es: Mientras se puede intentar "trabajando a la inversa"desde la conclusión a la hipótesis, buscando un método de demostración; para tener una demostración válida debemos ser capaces de revertir todas las implicaciones.

Veamos ahora otro ejemplo (esta vez correcto).

c) $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $D_x x^n = nx^{n-1}$ (aquí D_x representa la derivada con respecto a x).

Cuando $n = 1$ se tiene $D_x x^1 = 1 \cdot x^{1-1} = 1$ lo cual es verdadero.

Supongamos que $k \in \mathbb{N}$ y $D_x x^k = kx^{k-1}$. Entonces

$$\begin{aligned} D_x x^{k+1} &= D_x x \cdot x^k = 1 \cdot x^k + x \cdot kx^{k-1} \\ &= x^k + kx^k = (k+1)x^k \end{aligned}$$

lo que completa la demostración.

d) Para cada número natural n, $n^3 - n$ es divisible por 3. En simbolos: $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $3|n^3 - n$.

Recordemos que $a|b$ sy y sólo si $\exists\, c \in \mathbb{Z} \ni b = ac$.

Cuando $n = 1$ se tiene $3|1^3 - 1$ ó $3|0$ lo cual es verdadero ya que $0 = 3 \cdot 0$.

Supongamos ahora que $k \in \mathbb{N}$ y $3|k^3 - k$. Esto significa que existe un entero, digamos m, tal que $k^3 - k = 3m$. Luego,

$$\begin{aligned}(k+1)^3 - (k+1) &= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k - 1 \\ &= (k^3 - k) + 3(k^2 + k) \\ &= 3m + 3(k^2 + k) \\ &= 3(m + k^2 + k)\end{aligned}$$

así $(k+1)^3 - (k+1)$ es divisible por 3, completando la prueba.

El principio de inducción matemática puede ser generalizado de la siguiente forma: Si $S \subseteq \mathbb{Z}$ tiene las propiedades:

a) $n_0 \in S$

b) $\forall\, n \in \mathbb{Z}, n \geq n_0, n \in S \longrightarrow n+1 \in S$, entonces $\{n \in \mathbb{Z} \,:\, n \geq n_0\} \subseteq S$.

Si además, n_0 es el menor elemento de S, entonces

$$\{n \in \mathbb{Z} \,:\, n \geq n_0\} = S.$$

Observe que el principio de inducción matemática es un caso especial con $n_0 = 1$.

Como un ejemplo de aplicación, consideremos el siguiente:

e) $\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geq 13, n^2 < (\frac{3}{2})^n$.

Aquí nuestro paso base es $n = 13$. Observemos que

$$13^2 = 169 < 194 < \frac{1594323}{8192} = \left(\frac{3}{2}\right)^{13}$$

por lo tanto nuestro paso base es verdadero.

ahora, supongamos que $n > 13$ y $n^2 < (\frac{3}{2})^n$. Entonces

$$\begin{aligned}
(n+1)^2 &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^2 n^2 \\
&< \left(1+\frac{1}{13}\right)^2 n^2 \\
&< \frac{3}{2}\, n^2 \\
&< \frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^n = \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}.
\end{aligned}$$

Esto completa la prueba.

0.1 Formas equivalentes de inducción

En esta sección discutiremos dos proposiciones equivalentes al principio de inducción matemática. En algunas situaciones una de estas formas puede ser más fácil de usar que otras. La primera es conocida como el *principio del buen orden*:

Sea S un subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$. Entonces S tiene un menor elemento; esto es, existe $y \in S$ tal que para cada $x \in S$, $y \leq x$.

El segundo es conocido como el *principio de inducción completa*:

Si S es un subconjunto de $\mathbb{N}$ tal que :

a) $1 \in S$,

b) $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\{1, 2, 3, \ldots, n\} \subseteq S \longrightarrow n+1 \in S$, entonces $S = \mathbb{N}$.

Observe que el principio de inducción completa parece estar cercanamente relacionado con el principio de inducción matemática. Por otra parte, la conexión entre los dos anteriores y el principio del buen orden no parece ser tan clara.

En lo que sigue demostraremos que los tres principios enunciados son, realmente, equivalentes. Así, podríamos elegir cualquiera de ellos como axioma y probar el resto como teorema.

Teorema 2 *Suponga que el principio de inducción matemática es verdadero y sea S un subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$. Entonces S tiene un menor elemento.*

Demostración. Haremos una prueba indirecta. Supongamos que S es un subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$ que no tiene un menor elemento. Sea S^c el complemento de S; esto es, $S^c = \mathbb{N} - S$. Se define

$$T = \{x \in \mathbb{N} : \text{ para cada } y \leq x \ , \ y \in S^c\}.$$

Entonces ya que $1 \in S^c$ (pues si $1 \in S$, entonces 1 debe ser el menor elemento de S ya que $\forall\, x \in \mathbb{N}$, $1 \leq x$), $1 \in T$.

Supongamos ahora que $k \in T$. Debido a la forma en que T está definido, esto significa que $1, 2, \cdots, k$ deben ser todos elementos de S^c.

¿Qué podemos decir de $k+1$?

Si $k+1 \in S$, entonces debe ser el menor elemento de S (pues $1, 2, \cdots, k$ están en S^c) lo que no es posible ya que S no tiene un elemento menor. Por lo tanto, $k+1 \in S^c$. Esto implica que $k+1 \in T$.

Luego por el principio de inducción matemática, $T = \mathbb{N}$. Esto significa que $S^c = \mathbb{N}$ (por la definición de T). Pero, como $S^c = \mathbb{N} - S$, entonces $S = \emptyset$ lo que es una contradicción. Por lo tanto, S debe tener un menor elemento.

∎

Teorema 3 *Suponga que el principio del buen orden es verdadero y sea S un subconjunto de $\mathbb{N}$ tal que*

a) $1 \in S$,

b) $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\{1, 2, 3, \ldots, n\} \subseteq S \longrightarrow n+1 \in S$.

Entonces $S = \mathbb{N}$.

Demostración. Suponga que S es como antes y consideremos S^c. Si $S^c = \emptyset$, entonces $S = \mathbb{N}$. Supongamos, por lo tanto, que $S^c \neq \emptyset$.

Por el principio del buen orden, S^c tiene un menor elemento, digamos y. Observemos que $y \neq 1$ ya que $1 \in S$ (por hipótesis a)). ¿Qué podemos decir sobre $1, 2, \ldots, y-1$?

Nótese que todos ellos deben ser elementos de S, pues de otra manera uno de ellos debería ser el menor elemento de S^c en vez de y.

Así, por hipótesis b), $y \in S$. Pero esto es una contradicción pues $y \in S^c$. Luego, $S^c = \emptyset$ lo que significa que $S = \mathbb{N}$. ■

Teorema 4 *Suponga que el principio de inducción completa es verdadero y sea S un subconjunto de $\mathbb{N}$ tal que*

a) $1 \in S$

b) $\forall\, n \in \mathbb{N},\ n \in S \longrightarrow n+1 \in S$.

Entonces $S = \mathbb{N}$.

Demostración. Suponga que S tienen las propiedades a) y b) anteriores. Usaremos el principio de inducción completa para probar que $S = \mathbb{N}$.

Ya que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \{1, 2, 3, \ldots, n\} \subseteq S \longrightarrow n \in S$ es una proposición obviamente verdadera, se tiene por b)

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\ ,\ (\{1, 2, 3, \ldots, n\} \subseteq S \longrightarrow n \in S) \wedge (n \in S \longrightarrow n+1 \in S)$$

lo que implica $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \{1, 2, 3, \ldots, n\} \subseteq S \longrightarrow n+1 \in S$.

Luego, S satisface las hipótesis del principio de inducción completa y, en consecuencia, $S = \mathbb{N}$. ■

Veamos ahora como podemos utilizar estas formulaciones alternativas del principio de inducción matemática para probar proposiciones.

Teorema 5 $\sqrt{2}$ *es irracional.*

Demostración. Procederemos indirectamente.

Supongamos que $\sqrt{2}$ es racional; esto es, supongamos que existen números naturales r, s tales que $\sqrt{2} = \dfrac{r}{s}$. Entonces

$$S = \{k \in \mathbb{N} \,:\, k = n\sqrt{2} \text{ para algún } n \in \mathbb{N}\}$$

es un conjunto no vacío de números naturales (en particular, $s\sqrt{2} = r$, luego $r \in S$).

Sea $y \in \mathbb{N}$ tal que $x = y\sqrt{2}$.

Ahora $y(\sqrt{2} - 1) = x - y$ es un número natural menor que y (puesto que $0 < \sqrt{2} - 1 < 1 \longrightarrow 0 < y(\sqrt{2} - 1) < y \longleftrightarrow 0 < x - y < y$).

Luego, $z := y(\sqrt{2} - 1)\sqrt{2}$ es menor que x (ya que $y(\sqrt{2} - 1)\sqrt{2} = (x - y)\sqrt{2} < y\sqrt{2} = x$).

Pero $z = 2y - y\sqrt{2} = 2y - x$. Luego, $z \in \mathbb{N}$ y $z \in S$ (ya que $x - y < y \longrightarrow x < 2y$ y $z = y(\sqrt{2} - 1)\sqrt{2}$ con $y(\sqrt{2} - 1) = x - y$ un número natural menor que y según vimos).

Así, se tiene una contradicción pues $z \in S$ y es menor que x. Luego, S debe ser vacío. Por lo tanto $\sqrt{2}$ es irracional. ∎

Como otro ejemplo del uso del principio del buen orden, probaremos el siguiente resultado.

Teorema 6 (Algoritmo de división) *Sean a, $b \in \mathbb{N}$. Entonces existen enteros q, r tales que*

$$a = bq + r \ \textit{ con } \ 0 \leq r < b.$$

Demostración. Sean $a, b \in \mathbb{N}$ y sea

$$S = \{a - bk \,:\, k \in \mathbb{Z} \,,\, a - bk \geq 0\}.$$

Observamos que $S \neq \emptyset$ pues $a = a - b \cdot 0 \in S$.

Por el principio del buen orden, S tiene un menor elemento, digamos $r = a - bq$.

Claramente, r es un entero y $a = bq + r$. Por lo tanto, sólo debemos probar que $0 \leq r < b$.

Por la definición de S, $r \geq 0$. Si $r \geq b$, entonces

$$a - b(q + 1) = r - b \geq 0,$$

por lo que $r - b$ debe ser un elemento de S. Pero $r > r - b$ lo que es una contradicción (pues r es menor elemento de S). Así, $r < b$. ∎

Como un ejemplo de un resultado usando principio de inducción completa, consideremos el siguiente.

Teorema 7 *Sea $n \in \mathbb{N}$. Entonces $n = 1$, n es un número primo o n es un producto de números primos (recuerde que un número primo es un número natural cuyos únicos factores son 1 y el mismo número).*

Demostración. Si se define $p(n)$ como la proposición "$n = 1$ ó n es un primo ó n es un producto de primos"entonces deseamos probar que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $p(n)$.

Sea

$$S = \{n \in \mathbb{N} \,:\, p(n) \text{ es verdadero } \}.$$

Claramente $1 \in S$.

Ahora supongamos que $1, 2, \ldots, k$ son todos elementos de S y consideremos $k + 1$.

Si $k + 1$ es un primo, la prueba está concluida.

Supongamos que $k + 1$ no es primo.

Ya que $k + 1$ no es un primo este debe tener factores menores que él mismo (y mayores que 1), digamos r y s; esto es,

$$k + 1 = r \cdot s.$$

Ahora, r y s son ambos elementos de S (pues son menores que $k+1$) y así son primos o bien productos de primos.

Pero entonces se ha escrito $k+1$ como un producto de primos, y luego $k+1 \in S$. Por el principio de inducción completa, se tiene $S = \mathbb{N}$. ∎

0.2 El binomio de Newton

Como una aplicación adicional del principio de inducción matemática, vamos a probar en esta sección el conocido *Teorema del binomio de Newton.*

A fin de enunciar el resultado, requerimos definir el siguiente objeto matemático: Dados $n, k \in \mathbb{N}$ tales que $k \leq n$ denotamos

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

donde $p! = 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot p$ $(p \in \mathbb{N})$ corresponde al llamado *factorial* de un número natural p. Así, por ejemplo,

$$\begin{aligned} 1! &= 1 \\ 2! &= 1 \cdot 2 = 2 \\ 3! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6. \end{aligned}$$

El simbolo $\binom{n}{k}$ se lee "n sobre k" y posee las siguientes propiedades, entre otras.

(1) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

(2) $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$

La demostración de las identidades anteriores no son difíciles y se dejan como ejercicio para el lector.

Recordemos que el simbolo

$$\sum_{k=1}^{n} a_k$$

donde $a_k \in \mathbb{R}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, denota la suma:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n.$$

Con las notaciones precedentes, podemos enunciar y probar el siguiente.

Teorema 8 *Dados $a, b \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$ se tiene*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) a^{n-k} b^k.$$

Demostración. Cuando $n = 1$, se tiene $(a+b)^1 = \sum_{k=0}^{1} \left(\begin{array}{c} 1 \\ k \end{array} \right) a^{1-k} b^k$ lo cual es claramente verdadero ya que la suma del lado derecho es igual a:

$$\left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right) a^{1-0} b^0 + \left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right) a^{1-1} b^1.$$

Supongamos ahora que el teorema es verdadero para n. Debemos probar que

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \left(\begin{array}{c} n+1 \\ k \end{array} \right) a^{n+1-k} b^k.$$

Para este fin, escribimos:

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)^n(a+b)\\
&= (a+b)^n a + (a+b)^n b\\
&= \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k\right)a + \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k\right)b\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n+1-k}b^k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k+1}\\
&= \binom{n}{0}a^{n+1}b^0 + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^{n+1-k}b^k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k+1}.
\end{aligned}$$

Desarrollamos el tercer sumando, haciendo $t = k+1$. Luego

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k+1} = \sum_{t=1}^{n+1}\binom{n}{t-1}a^{n+1-t}b^t.$$

Como t es una variable fija pero arbitraria podemos escribir

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k+1} = \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}a^{n+1-k}b^k.$$

Luego, queda:

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= \binom{n}{0}a^{n+1}b^0 + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^{n+1-k}b^k + \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}a^{n+1-k}b^k\\
&= \binom{n}{0}a^{n+1}b^0 + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^{n+1-k}b^k + \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}a^{n+1-k}b^k\\
&+ \binom{n}{n}a^0b^{n+1}\\
&= \binom{n}{0}a^{n+1}b^0 + \sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right]a^{n+1-k}b^k + \binom{n}{n}a^0b^{n+1}(*).
\end{aligned}$$

Usando la propiedad (2) vista previamente, obtenemos que lo anterior es igual a

$$\left(\begin{array}{c} n \\ 0 \end{array}\right) a^{n+1}b^0 + \sum_{k=1}^{n} \left(\begin{array}{c} n+1 \\ k \end{array}\right) a^{n+1-k}b^k + \left(\begin{array}{c} n \\ n \end{array}\right) a^0 b^{n+1}.$$

Ahora, no es difícil ver, por definición, que

$$\left(\begin{array}{c} n \\ 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} n+1 \\ 0 \end{array}\right) = 1 \quad \text{y} \quad \left(\begin{array}{c} n \\ n \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} n+1 \\ n+1 \end{array}\right) = 1.$$

Luego, la expresión $(*)$ es lo mismo que

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{c} n+1 \\ 0 \end{array}\right) a^{n+1}b^0 + \sum_{k=1}^{n} \left(\begin{array}{c} n+1 \\ k \end{array}\right) a^{n+1-k}b^k + \left(\begin{array}{c} n+1 \\ n+1 \end{array}\right) a^0 b^{n+1} \\ = & \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n+1 \\ k \end{array}\right) a^{n+1-k}b^k, \end{aligned}$$

que es lo que queríamos probar. ■

0.3 Ejercicios

1. Pruebe usando inducción:

   a) $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

   b) $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

   c) $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i+1)(2i-1)} = \frac{n}{2n+1}$.

   d) $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{i=1}^{n}(3i-1) = \frac{n}{2}(3n+1)$.

   e) $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{i=1}^{n} 3^{i-1} = \frac{3^n-1}{2}$.

   f) $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}i(i+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$.

   g) $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{i=1}^{n} i2^{i-1} = 1 + (n-1)2^n$.

   h) $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{i=1}^{n}(3i-2) = \frac{n(3n-1)}{2}$.

   i) $\forall n \in \mathbb{N},\ 1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$.

   j) $\forall n \in \mathbb{N},\ 1^4 + 2^4 + \cdots + n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$.

   k) $\forall n \in \mathbb{N},\ 1^5 + 2^5 + \cdots + n^5 = \frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}$.

   l) $\forall n \in \mathbb{N},\ 1^6 + 2^6 + \cdots + n^6 = \frac{n^7}{7} + \frac{n^6}{2} + \frac{n^5}{2} - \frac{n^3}{6} + \frac{n}{42}$.

   m) $\forall n \in \mathbb{N},\ 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

n) $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 6 + \cdots + (2n-1)(2n) = \dfrac{n(n+1)(4n-1)}{3}$.

o) $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \cdots + n(n+1)(n+2) = \dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$.

p) $\forall n \in \mathbb{N}$, $x^{2n} - y^{2n}$ es divisible por $(x-y)$.

q) $\forall n \in \mathbb{N}$, $x^{2n-1} + y^{2n-1}$ es divisible por $(x+y)$.

r) $\forall n \in \mathbb{N}$, $n^3 + 2n$ es divisible por 3.

s) $\forall n \in \mathbb{N}$, $2n + (-1)^{n+1}$ es divisible por 3.

t) $\forall n \in \mathbb{N}$, $10^n + 3 \cdot 4^{n+1} + 5$ es divisible por 9.

u) $\forall n \in \mathbb{N}$, $5^{2n} + (-1)^{n+1}$ es divisible por 13.

v) $\forall n \in \mathbb{N}$, $7^{2n} + 16 - 1$ es divisible por 64.

w) $\forall n \in \mathbb{N}$, $2304|(7^{2n} - 48n - 1)$.

x) $\forall n \in \mathbb{N}$, $1/\sqrt{1} + 1/\sqrt{2} + \cdots + 1/\sqrt{n} \leq 2\sqrt{n} - 1$.

y) $\forall n \in \mathbb{N}$, $1^k + 2^k + \cdots + n^k \leq n^{k+1}$.

z) $\forall n \in \mathbb{N}$, $(1+x)^n \geq 1 + nx$, si $x \geq -1$.

2. Encuentre el menor entero positivo j para el que el enunciado es verdadero; con el principio extendido de inducción matemática pruebe que la fórmula es verdadera para todo entero mayor que j.

   a) $n + 12 \leq n^2$.

   b) $n^2 + 18 \leq n^3$.

   c) $5 + \log_2 n \leq n$.

   d) $n^2 \leq 2^n$.

   e) $2n + 2 \leq 2^n$.

   f) $n \log_2 n + 20 \leq n^2$.

3. Exprese la suma en términos de n.

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k^2+3k+5)$.

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(3k^2-2k+1)$.

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-3)^2$.

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k^3+2k^2-k+4)$.

4. Evalúe la expresión.

a) $2!6!$

b) $7!0!$

c) $\dfrac{8!}{5!}$

d) $\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 13 \\ 4 \end{pmatrix}$

5. Reescriba las siguientes expresiones sin factoriales.

a) $\dfrac{(2n+2)!}{(2n)!}$

b) $\dfrac{(3n+1)!}{(3n-1)!}$

6. Utilice el teorema del binomio para expandir y simplificar.

a) $(4x-y)^3$

b) $(a+b)^6$

c) $(a-b)^6$

d) $(3x-5y)^4$

e) $(\frac{1}{3}x+y^2)^5$

f) $(\frac{1}{x^2}+3x)^6$

g) $(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}})^5$

7. Sin expandir por completo, encuentre los términos indicados en la expansión de la expresión.

a) $(3c^{2/5}+c^{4/5})^{25}$; primeros tres términos.

b) $(4b^{-1}-3b)^{15}$; últimos tres términos.

c) $\left(\frac{3}{c}+\frac{c^2}{4}\right)^7$; sexto término.

d) $\left(\frac{1}{3}u+4v\right)^8$; séptimo término.

e) $(x^{1/2}+y^{1/2})^8$; término del medio.

f) $(2y+x^2)^8$; término que contiene x^{10}.

g) $(3b^3-2a^2)^4$; término que contiene b^9.

h) $\left(3x-\frac{1}{4x}\right)^6$; término que no contiene x.

8. Demuestre que:

a) $\begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n-1 \end{pmatrix}$; para $n \geq 1$.

b) $\begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix}$; para $n \geq 0$.