INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS DIMENSIONAL

J.R. Martínez
FC–UASLP

ACADEMIA POTOSINA de DIVULGACIÓN de la CIENCI

Capítulo 1

SISTEMAS DE MEDIDA

Desde épocas remotas el hombre ha aprendido a hacer comparaciones, en la actualidad es muy común utilizar expresiones como: hace mucho calor, es muy tarde, es feo, estoy cansado etc., al decir esto, estamos efectuando mediciones.. Por medición entendemos una comparación homogénea entre objetos, esta comparación puede llevar a conclusiones como las anteriores. Este tipo de comparación conduce a una medición cualitativa. Así puede resultar que un objeto o la propiedad física de un objeto es mayor, menor o igual a la misma propiedad física de otro objeto. Hay que hacer notar que esta comparación es totalmente arbitraria en el sentido que se puede comparar las propiedades físicas de un objeto con las propiedades físicas de cualquier otro objeto siempre y cuando estas comparaciones sean homogéneas. No tiene ningún sentido comparar la altura de un edificio con la velocidad que adquiere un tren.

Si al hacer una comparación entre objetos obtenemos un número entonces estamos efectuando una medición cuantitativa, las cuales resultan más interesantes que las mediciones cualitativas. La comparación de las propiedades físicas A y A' de cualesquier dos objetos la podemos expresar como

$$\frac{A}{A'} = a \tag{1.1}$$

donde a es un número puro.

En la ciencia y en la técnica estas comparaciones se realizan con gran sofisticación a fin de poder obtener un número que sea lo más exacto y preciso posible. Supongamos que deseamos saber la longitud de una mesa y para esto seleccionamos como objeto de comparación la longitud de un lapicero, al efectuar una medición cualitativa podriamos decir que la longitud de la mesa es mucho mayor que la longitud del lapicero, esto en la mayoría de los casos no es suficiente ya que deseariamos saber que tan grande es, para esto efectuamos una medición cuantitativa y podemos decir: la longitud de la mesa es 500 veces mayor que la longitud del lapicero. Igualmente la longitud de esta mesa podría ser medida comparandola con la longitud de cualquier otro objeto. Es común denominar al objeto utilizado para hacer la comparación como objeto patrón de comparación. Como puede observarse existe una total arbitrariedad sobre la forma de efectuar estas comparaciones y desde la antiguedad se han utilizado objetos patrones de comparación de lo mas curioso. En el año 1101 Enrique I de Inglaterra introduce la yarda como medida de longitud, la cual seleccionó como la distancia desde su nariz hasta su dedo pulgar para ello solo tuvo que estirar su brazo y permitir que un monje colocara una vara desde su nariz hasta su dedo pulgar. El propio rey, con su cuerpo, era quien proporcionaba la medida de las cosas y los subditos acataban la palabra real que por aquél entonces tenía valor de ley. Hoy en día resultaría muy complicado continuar operando con medidas tales como el pie, que equivalía exactamente a la longitud de la huella del pie de Carlomagno emperador de toda la cristiandad, o como el canto del gallo, utilizado para fijar distancias en la isla de Borneo. En la actualidad estas comparaciones se efectuan utilizando unidades patrones que forman parte de los llamados sistemas de unidades. Un sistema de unidades consiste de un conjunto de unidades fundamentales y derivadas, donde estas últimas se obtienen de las primeras a través de relaciones entre cantidades físicas conocidas como correlaciones determinantes. Si se selecciona una unidad de las magnitudes físicas de longitud y tiempo como unidades fundamentales (es común llamar a estas magnitudes como magnitudes fundamentales) entonces podemos obtener a la velocidad como magnitud derivada seleccionando su unidad a través de la correlación determinante

$$v = k\frac{ds}{dt} \tag{1.2}$$

donde k es la constante de correlación y depende del tipo de unidades utilizadas, en si guarda la definición de la unidad derivada, por ejemplo, si se selecciona el metro como unidad de longitud y el segundo como unidad de tiempo entonces

$$k = 1\ \frac{\text{metro por segundo}}{m\ seg^{-1}}. \tag{1.3}$$

De esta forma estamos definiendo como unidad derivada para la aceleración el *metro por segundo* (m/s). De igual forma podriamos haber seleccionado un valor para k diferente de la unidad y entonces haber construido una unidad derivada para la velocidad acorde a este valor de k. Además podriamos haber seleccionado cualquier otro tipo de unidad para la longitud y asignarle un nombre arbitrario.

La constante de correlación k esta presente en todas las relaciones entre magnitudes físicas, aunque en algunos casos implicitamente ya que en algunas de estas relaciones se le da un valor igual a la unidad como en el caso del ejemplo anterior y como sucede en los sistemas de unidades más comunes como son el MKS, CGS, SI etc. Para definir una nueva unidad derivada puede ser utilizada en la correlación determinante una o varias magnitudes derivadas. Al determinar a la aceleración como magnitud derivada y tomando el ejemplo anterior en donde se selecciona el metro como unidad fundamental para la longitud, el segundo como unidad fundamental para el tiempo, el metro por segundo (m/s) como unidad derivada para la velocidad y como correlación determinante

$$a = k\frac{dv}{dt} \tag{1.4}$$

la definición de la unidad derivada para la aceleración queda determinada por el valor de k obteniendo

$$k = 1\,\frac{\text{metro por segundo al cuadrado}}{m\;seg^{-1}\;seg^{-1}} \tag{1.5}$$

esto es definimos como unidad derivada para la aceleración el *metro por segundo al cuadrado* (m/s^2).

Para la fuerza obtendriamos, si utilizamos como correlación determinante

$$F = k_i m a \tag{1.6}$$

$$k_i = 1\,\frac{\text{Newton}}{m\;Kg\;s^{-1}\;s^{-1}} \tag{1.7}$$

esto es, estamos definiendo el *Newton* como 1 $m\;Kg\;s^{-2}$. Sin embargo, en este caso no es la única correlación determinante de que disponemos, igualmente podriamos utilizar la ley de gravitación universal

$$F = k_G\frac{m_1 m_2}{r^2} \tag{1.8}$$

y entonces definir como unidad derivada para la fuerza una unidad tal que nos permita escoger a k_G igual a la unidad. Haciendo esto tenemos que

$$k_G = 1\,\frac{\text{UGF}}{Kg^2\;m^{-2}}. \tag{1.9}$$

Hemos definido como unidad para la fuerza la *unidad gravitatoria de fuerza*, UGF, y por lo tanto corresponde a un valor de $k_G = 1$, mientras que cuando definimos como unidad de fuerza el *Newton* seleccionando como correlación determinante la segunda ley de Newton el valor de k_G resulta ser igual a $6.67 \times 10^{-11}\ N\,m^2/Kg^2$. En este caso la k_G no es una constante de correlación sino una constante universal y es conocida como constante de gravitación universal.

Cuando seleccionamos a $k_G = 1$, la $k_i \neq 1$ y asumiria un valor de

$$k_i = 1.5 \times 10^{10}\,\mathrm{UGF}\,s^2\,(Kg\,m)^{-1}.$$

En este punto podemos notar que las constantes de proporcionalidad que aparecen en toda relación entre cantidades físicas pueden ser, por un lado, constantes de correlación cuyos valores son arbitrarios permitiendonos definir unidades derivadas, por otro lado, constantes universales que aparecen en las relaciones que no se seleccionan como determinantes y cuyos valores quedan fijados por el tipo de unidades utilizadas. Las constantes de correlación son adimensionales y comunmente tienen un valor igual a la unidad, mientras que las constantes universales tienen asociadas unidades y sus valores dependen de estas.

El número de constantes universales depende fuertemente del número de magnitudes fundamentales seleccionadas para construir un sistema de unidades. Conforme este número sea grande la cantidad de magnitudes derivadas sera menor y consecuentemente la cantidad de relaciones físicas utilizadas como correlaciones determinantes tambien será menor. Esto tiene como consecuencia que el número de constantes de correlación disminuya y como resultado habrá un mayor número de constantes universales.

Un punto importante en la construcción de un sistema de unidades es el establecer el número de unidades fundamentales que este debe de contener a fin de que resulte un sistema práctico y debemos de tener en cuenta que si bien un sistema con una gran cantidad de unidades fundamentales nos facilita la determinación de las unidades derivadas, por otra parte nos obliga a manejar una gran cantidad de constantes universales cuyos valores debemos de manejar en toda relación entre cantidades físicas. Mientras que si seleccionamos una cantidad muy pequeña de unidades fundamentales las constantes universales que tendriamos que manejar serían muy pequeñas pero nos limitaría la posibilidad de construir unidades derivadas.

Un ejemplo típico de lo anterior es el siguiente: para la definición de la unidad de fuerza vimos que se podía utilizar como correlación determinante, o bien la segunda ley de Newton o bien la ley de gravitación universal. Si unimos ambas leyes en calidad de correlación determinante obtenemos

$$k_i ma = k_G \frac{m_1 m_2}{r^2} \tag{1.10}$$

de donde obtenemos que

$$m = kr^2 a \tag{1.11}$$

la constante de correlación k representa la relación de la constante de inercia k_i y la constante de gravitación k_G

$$k = \frac{k_i}{k_G} \tag{1.12}$$

La correlación determinante de la Ec.(1.11) nos permite definir una unidad derivada para la masa seleccionando el valor de k en la Ec.(1.11) igual a la unidad. Como se puede notar este procedimiento nos ha permitido reducir el número de constantes universales reduciendo el número de magnitudes fundamentales. Con todo esto podemos observar que existe una total arbitrariedad tanto en la elección de las correlaciones determinantes, en la elección de las magnitudes fundamentales y en la elección de los valores de los coeficientes numéricos de las correlaciones determinantes. Todo esto nos conduce a una completa arbitrariedad en la construcción de los sistemas de unidades, lo cual puede conducir a problemas serios de interpretación cuando se emplean unidades y sistemas de medida de uso muy partícular como sucede, cuando decimos que una persona se desplaza 25 Arshin, posiblemente no sepamos que significa esto. Implicitamente hablamos de longitud pero no sabemos que tanta distancia se ha desplazado. Más crítico aún sería si decimos que un objeto tiene 35.6 Zolotnik, lo mas seguro es que esta expresión no nos diga absolutamente nada.

Para poder aspirar en la ciencia a una comunicación verdaderamente efectiva entre los países del mundo asi como para facilitar las relaciones internacionales de comercio etc. Se hace indispensable construir Sistemas de Unidades que sean universales, o bien, conocer las relaciones entre las unidades de los diferentes sistemas utilizados en el mundo. En la época de la Revolución Francesa fue creado el Sistema Métrico o sistema decimal de medidas que tiene la caracteristica de que las diferentes unidades de una misma magnitud, se relacionan entre si como exponentes enteros de diez tanto positivos como negativos. Más recientemente en el año de 1960 nace el Sistema Internacional de Unidades (SI) el cual es aceptado unánimemente por todo el mundo. El sistema SI contiene como unidades fundamentales: el metro para la longitud; el kilo para la masa; el segundo para el tiempo; el amperio para la fuerza de la corriente eléctrica; el kelvin para la temperatura;la candela para la intensidad de la luz y el mol para las cantidades de materia.

Capítulo 2

FÓRMULAS DIMENSIONALES

Las magnitudes derivadas se relacionan con magnitudes fundamentales y posiblemente con otras magnitudes derivadas a través de correlaciones determinantes. Como discutimos en el capítulo anterior, la constante de correlación k contiene la definición de la unidad derivada y al hacer esto se le asigna el valor uno. En este sentido la unidad derivada queda en función de unidades fundamentales. Es claro que cualquier variación de la unidad fundamental propiciará una variación en la unidad derivada. por ejemplo, el área se obtiene multiplicando una longitud por otra longitud, si consideramos a la longitud como magnitud fundamental y al área como magnitud derivada, entonces cualquier variación en la unidad fundamental para la longitud propiciará una variación en la unidad derivada para el área. Por esto nos interesa hallar una correlación que nos permita determinar como variará la unidad derivada al variar las unidades fundamentales. Tal correlación se conoce como fórmula dimensional. En el ejemplo para el área, podemos decir que el área tiene dimensiones de longitud al cuadrado.

La construcción de las fórmulas dimensionales depende de la elección de las magnitudes fundamentales y de las correlaciones determinantes. Veamos primero el caso de sistemas que emplean las mismas magnitudes fundamentales, por ejemplo, *longitud, masa* y *tiempo* y las mismas correlaciones determinantes. Nos interesa investigar como varia la unidad derivada al variar las unidades fundamentales. Si al variar la unidad de longitud en n veces, la unidad de masa m veces y la unidad de tiempo r veces la unidad derivada varia en n^p veces, m^q veces y en r^s veces, entonces decimos que la unidad derivada analizada es de dimensión p con respecto a la unidad de longitud, de dimensión q respecto a la unidad de masa y de dimensión s respecto a la unidad de tiempo. Lo anterior lo escribimos como:

$$[A] = L^p M^q T^s. \tag{2.1}$$

Por ejemplo, la fórmula dimensional para la velocidad en este tipo de sistemas sería

$$[V] = L^1 M^0 T^{-1} \tag{2.2}$$

la unidad derivada para la velocidad es de dimensión *uno* con respecto a la unidad de longitud, de dimensión *menos uno* con respecto a la unidad de tiempo y de dimensión *cero* con respecto a la unidad de masa, o bien, adimensional con respecto a la unidad de masa. Esto significa, que si tomamos el kilometro como unidad de longitud en lugar del metro y conservamos el segundo como unidad de tiempo entonces tendremos la unidad de velocidad *Kilometro por segundo* que es $(1000)^1$ veces mayor que el *metro por segundo.* Si ahora tomamos la hora como unidad de tiempo en lugar en lugar del segundo y consevamos el metro como unidad de longitud, entonces, la unidad de velocidad *metro por hora* será $(3600)^{-1}$ veces que la unidad *metro por segundo*, o sea, 3600 veces menor que m/s.

Construir una formula dimensional consiste en expresar la magnitud derivada exclusivamente en términos de magnitudes fundamentales. La construcción de las fórmulas dimensionales puede basarse en las propias correlaciones determinantes para las distintas magnitudes físicas, reduciendolas hasta obtener la magnitud derivada deseada en función de puras magnitudes fundamentales, o bien, en función de otras magnitudes derivadas cuya formula dimensional se conozca, por ejemplo, si se desea obtener la formula dimensional para la aceleración usando como correlación determinante

$$a = \frac{dv}{dt} \tag{2.3}$$

tenemos a la aceleración en términos de una magnitud derivada (la velocidad) y una magnitud fundamental (el tiempo), podemos proceder de dos formas. Si ya conocemos la formula dimensional para la velocidad Ec.(2.2), entonces

$$[A] = [\frac{v}{t}] \tag{2.4}$$

la Ec.(2.4) la podemos expresar como

$$[A] = [V][T]^{-1} \tag{2.5}$$

y entonces usando la Ec.(2.2) obtenemos

$$[A] = (L^1 T^{-1}) T^{-1} \tag{2.6}$$

la Ec.(2.6) la podemos escribir, finalmente como

$$[A] = L^1T^{-2}. \tag{2.7}$$

Igualmente podemos proceder tomando en cuenta que

$$v = \frac{ds}{dt} \tag{2.8}$$

entonces,

$$a = \frac{ds/dt}{dt}, \tag{2.9}$$

en la Ec.(2.9) tenemos expresada la aceleración en términos de las magnitudes fundamentales de longitud y tiempo, su fórmula dimensional será

$$[a] = [x][t]^{-2} \tag{2.10}$$

con esto

$$[a] = L^1T^{-2}. \tag{2.11}$$

La Ec.(2.11) es idéntica a la Ec.(2.7) como era de esperar. De igual forma podemos construir la fórmula dimensional para las diferentes cantidades físicas. Recordemos que las constantes universales dependen de unidades, por lo que podemos tambien construir su fórmula dimensional. Consideremos como ejemplo la constante de gravitación universal.

$$k_G = \frac{Fr^2}{m_1m_2} \tag{2.12}$$

tanto la posición r como la masa m son magnitudes fundamentales por lo que su fórmula dimensional es trivial

$$[r] = L \qquad \text{y} \qquad [m] = M \tag{2.13}$$

mientras que la fuerza F es una magnitud derivada y su fórmula dimensional la construimos a través de la segunda ley de Newton obteniendo.

$$[F] = LMT^{-2} \tag{2.14}$$

con todo esto la fórmula dimensional para k_G es

$$[k_G] = L^3 M^{-1} T^{-2}. \tag{2.15}$$

La construcción de las fórmulas dimensionales depende de las magnitudes fundamentales que constituyan el sistema de medición. Por el momento hemos considerado sistemas de medición cuyas magnitudes fundamentales son de *Longitud, masa* y *tiempo.* Sin embargo, podemos tener sistemas en los cuales las magnitudes fundamentales sean otras, en estos casos la construcción de las fórmulas dimensionales es totalmente similar, solo que en este caso las diferentes cantidades físicas quedan en términos de las nuevas magnitudes fundamentales, con lo que las fórmulas dimensionales tendrían un aspecto diferente. Considerando un sistema de unidades cuyas magnitudes fundamentales sean *longitud, fuerza* y *tiempo*, la fórmula dimensional para la masa ya no sería $[m] = M$, sino

$$[m] = L^{-1} F T^2, \tag{2.16}$$

donde hemos utilizado para su construcción la segunda ley de Newton como correlación determinante. En este sistema $[F] = F$. para obtener las dimensiones de cualquier cantidad física en el sistema, LFT, tomando como base las fórmulas dimensionales construidas en el sistema LMT es suficiente remplazar en ellas la masa por la expresión dada en la Ec.(2.16).

En un sistema de unidades fundamentales reducido, donde se seleccionen a la *longitud* y al *tiempo* como magnitudes fundamentales, es suficiente construir la fórmula dimensional para la masa y como en el caso anterior, sustituir las dimensiones de la masa en las fórmulas dimensionales construidas en el sistema LMT, o bien, construir la fórmula dimensional para la fuerza y sustituir las dimensiones de la fuerza en las fórmulas dimensionales construidas en el sistema LFT. En este caso las fórmulas dimensionales tendrán el siguiente aspecto

$$[A] = L^m T^n, \tag{2.17}$$

donde A representa cualquier magnitud física.

La construcción de una fórmula dimensional depende ademas de las correlaciones determinantes que se seleccionan para la construcción de las unidades derivadas. Si trabajamos en el sistema LMT y tratamos de construir la fórmula dimensional para la fuerza, podemos seleccionar, ya sea, la segunda ley de Newton o la ley de gravitación universal como correlación determinante. En el primer caso la fórmula dimensional de la fuerza es la Ec.(2.14), en el segundo caso

$$[F] = L^{-2}M^{2} \tag{2.18}$$

que como puede observarse presenta una forma muy diferente a la fórmula dimensional para la fuerza, Ec.(2.14), construida a partir de la correlación determinante para la fuerza de la segunda ley de Newton. El hecho de utilizar en determinado momento una de las dos leyes como correlaciones determinantes nos permite poder igualar a la unidad la constante de correlación que determina el tipo de unidad derivada.

En resumen, el aspecto de las fórmulas dimensionales dependen, tanto de las magnitudes fundamentales de un sistema de medición, como de las correlaciones determinantes seleccionadas para la construcción de unidades derivadas. La transposición de un sistema a otro se hace sustituyendo simplemente en las fórmulas dimensionales la dimensión de la cantidad requerida.

Capítulo 3

ANÁLISIS DIMENSIONAL

La mayoría de las cantidades físicas involucradas en un sistema físico estan relacionadas entre si a través de ecuaciones que comprenden las distintas leyes físicas. Si $A, B, C, D \ldots$ son cantidades físicas de un sistema, entonces A puede estar relacionada con el resto de las cantidades, esto es,

$$A = f(B, C, D \ldots). \tag{3.1}$$

Estas relaciones pueden obtenerse de forma empírica o en base a un desarrollo teórico. Independientemente de esto, cualquier relación entre cantidades físicas debe de cumplir necesariamente con la propiedad de dimensionalidad homogénea que consiste en pedir que los miembros de una ecuación física tengan las mismas dimensiones. Esto es, que la ecuación sea dimensionalmente correcta.

$$[A] = [f(B, C, D, \ldots)]. \tag{3.2}$$

Las fórmulas dimensionales nos permiten comprobar si una ecuación, candidata a representar una ley física, deducida teórica o experimentalmente es o no es correcta. Esta es una de las principales aplicaciones de las fórmulas dimensionales. Para ilustrar lo anterior consideremos el siguiente ejemplo, nos dicen que la ley que gobierna la distancia recorrida por un objeto en caída libre es dada por la siguiente relación

$$s = gt^3 \tag{3.3}$$

donde g es la aceleración de la gravedad y t el tiempo empleado en recorrer la distancia s. Podríamos mediante argumentaciones físicas comprobar si la relación es o no es correcta, también podemos utilizar análisis dimensional y checar si la relación es dimensionalmente correcta o no lo es. Si procedemos de esta forma obtendríamos que las dimensiones de s son

$$[s] = L, \tag{3.4}$$

mientras que las dimensiones del miembro derecho de la Ec.(3.3) son

$$[gt^3] = [g][t]^3 = LT. \tag{3.5}$$

Podemos observar que la Ec.(3.3) no es dimensionalmente correcta, por un lado tenemos dimensiones de longitud Ec.(3.4) y por el otro dimensiones de longitud por tiempo Ec.(3.5). Del análisis desarrollado vemos que la relación no puede ser correcta. Podemos afirmar esto aún sin dar argumentaciones físicas. Este análisis dimensional no nos permite decir como debe de ser la relación correcta aunque en este caso sencillo podríamos sugerir que fuera de la forma

$$s = gt^2 \tag{3.6}$$

ya que esto nos permitiría tener una fórmula dimensionalmente correcta, aunque, una fórmula dimensionalmente correcta no significa que sea válida. Este hecho es una limitación del análisis dimensional el cual solo nos proporciona una condición necesaria, pero no suficiente, que deben de cumplir cualquier relación física.

Según observamos del análisis desarrollado, una forma alternativa de poder predecir fórmulas físicas (leyes físicas) utilizando análisis dimensional es la siguiente: consideremos el ejemplo anterior y definamos nuestro sistema físico como el de un objeto que cae libremente y decimos que las cantidades físicas involucradas en el sistema podrían ser; la distancia recorrida s, el tiempo empleado t en recorrer esta distancia, la masa del objeto m, la aceleración de la gravedad g e incluso cantidades subjetivas como el color del objeto. Nos interesa conocer la relación que guarda la distancia recorrida con las diferentes cantidades físicas involucradas en el sistema.

$$s = f(m, t, g). \tag{3.7}$$

Esta relación Ec.(3.7) debe de satisfacer la condición

$$[s] = [f(m, t, g,)]. \tag{3.8}$$

Como demostraremos mas adelante la forma funcional de las cantidades físicas es através de productos cuyos términos estan elevados a una cierta potencia, positiva o negativa, esto es,

$$f(A, B, C, \ldots) = A^m B^n C^p \ldots. \tag{3.9}$$

Con esto, la Ec.(3.7) la podemos escribir como

$$s = m^x t^y g^z \tag{3.10}$$

y a su vez la condición de dimensionalidad Ec.(3.8) como

$$[s] = [m]^x [t]^y [g]^z. \tag{3.11}$$

Los valores de x, y y z deben ser tales que las dimensiones de la Ec.(3.11) sean correctas. expresando en fórmulas dimensionales la Ec.(3.11) obtenemos,

$$L = M^x T^y L^z T^{-2z} \tag{3.12}$$

arreglando los términos, la Ec.(3.12) nos queda,

$$L^1 M^0 T^0 = L^z M^x T^{y-2z}. \tag{3.13}$$

Para que esta relación sea dimensionalmente correcta el lado derecho de la Ec.(3.13) debe tener dimensiones lineales de longitud. Igualando los exponentes de uno y otro miembro de la Ec.(3.13) obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ z &= 1 \\ y - 2z &= 0 \end{aligned} \tag{3.14}$$

cuyas soluciones son

$$x = 0, \qquad y = 2 \qquad \text{y} \qquad z = 1 \tag{3.15}$$

con esto obtenemos que

$$[s] = [m]^0 [t]^2 [g]^1 \tag{3.16}$$

y de esta relación obtenemos finalmente

$$s = kgt^2 \tag{3.17}$$

donde k es una constante de proporcionalidad que se agrega considerando que cualquier constante es adimensional. Otra de las limitaciones del análisis dimensional es que no podemos obtener el valor numérico de la constante k, para poder obtenerlo debemos efectuar otro tipo de análisis, como puede ser el cuantitativo. El análisis dimensional efectuado nos dice que la distancia recorrida s es de dimensión cero con respecto a la masa m, a pesar de haber considerado que la masa estabá involucrada en el sistema, el análisis dimensional nos dice que la distancia que recorre un objeto en caída libre no depende de la masa del objeto. Del ejemplo anterior se desprende lo poderoso que en algunas ocaciones puede ser el análisis dimensional, ya que nos permite encontrar relaciones (leyes) de una forma más o menos sencilla.

Las limitaciones que contiene el análisis dimensional pueden superarse si se combina con otro tipos de análisis como son: el análisis cualitativo; el análisis cuantitativo y el análisis gráfico, las características de cada uno de ellos las discutimos a continuación

Análisis cualitativo

El estudio de cualquier sistema físico mediante un análisis cualitativo se desarrolla a través de mediciones cualitativas de las cantidades físicas involucradas en el sistema, efectuando lo que se denomina un experimento controlado. Esto es, un experimento del sistema físico en el cual el observador lo diseña de tal forma que pueda controlar las variables (cantidades físicas). Si en el sistema estan involucrádas las variables A, B, C, D y F y deseamos saber como se relaciona A con el resto de las variables, un experimento controlado, independientemente del análisis que se utilice, consiste en controlar (dejar fijas) las variables C, D, y F y en base a un diseño experimental encontrar como se relaciona A con B

$$A = f(B) \tag{3.18}$$

y repetir lo mismo para el resto de las variables. Esto es, controlar las variables B, D y F y encontrar la relación entre A y C

$$A = f(C) \tag{3.19}$$

etc.

$$A = f(D) \qquad \text{y} \qquad A = f(F). \tag{3.20}$$

La Ec.(3.18), (3.19) o (3.20), nos dice como afecta a la variable A cualquier variación de las variables B, C, D o F. La importancia del experimento controlado radica en que si dejaramos variar al mismo tiempo todas las variables físicas nos resultaría imposible detectar como afecta la variacón de cada una de ellas a la variable A y por lo tanto no estamos en posibilidades de poder obtener una relación del tipo

$$A = f(B, C, D, F). \tag{3.21}$$

Las Ecs.(3.18), (3.19) y (3.20) encontradas en base a un experimento controlado nos permite escribir una relación como la Ec.(3.21). En un análisis cualitativo las relaciones entre cantidades físicas son del tipo

$$A \alpha B^n \tag{3.22}$$

donde n puede ser un número, entero o fraccionário, positivo o negativo, o sea, la proporcionalidad en la Ec.(3.22) puede ser directa o inversa a cualquier potencia. La relación entre A y B de la Ec.(3.22) la convertimos a una ecuación agregando una constante de proporcionalidad c

$$A = cB^n. \tag{3.23}$$

La constante c depende de los valores fijados (controlados) de las variables C, D y F. Igualmente obtenemos para las relaciones de las Ecs.(3.19) y (3.20) expresiones como la Ec.(3.22)

$$A \alpha C^m \qquad A \alpha D^l \qquad A \alpha F^p \tag{3.24}$$

donde las potencias m, l y p son números con las mismas posibilidades que n en la Ec.(3.22). Las ecuaciones correspondientes a las relaciones de la Ec.(3.24) son

$$A = c_1 C^m \qquad A = c_2 D^l \qquad A = c_3 F^p \tag{3.25}$$

donde las constantes c_1, c_2 y c_3 dependen de las variables que fuerón controladas. Las Ecs.(3.22) y (3.24) nos permite escribir como es la relación entre las cantidades A, B, C, D y F.

$$A \alpha B^n C^m D^l F^p \tag{3.26}$$

y su respectiva ecuación

$$A = kB^nC^mD^lF^p. \tag{3.27}$$

En este punto la constante de proporcionalidad k tendrá un valor independiente de los valores de las variables involucradas, debido a que todas ellas estan expresadas explicitamente en la Ec.(3.27).

En un análisis cualitativo no tenemos oportunidad de obtener como son las constantes k, n, m, l y p a lo sumo podemos encontrar como son los signos de n, m, l y p, o sea, si las relaciones son directas o inversas.

Análisis cuantitativo

Las relaciones entre cantidades físicas se obtienen, en base a un experimento controlado y mediante mediciones cuantitativas. La relación entre las cantidades A y B controlando las cantidades C, D y F se encuentra una vez que obtengamos una serie de valores para A y B medidos cuantitativamente

$$A : a_1, a_2, a_3, a_4 \ldots$$

$$B : b_1, b_2, b_3, b_4 \ldots \tag{3.28}$$

donde a_i y b_i representan números. Estos valores necesariamente estan relacionados

$$a_i = f(b_i). \tag{3.29}$$

En la medida que logremos obtener como es la función que relaciona los números a_i y b_i sabremos como es la relación funcional entre las cantidades A y B.

$$A = cB^n \tag{3.30}$$

donde los valores para c y n estan totalmente determinados. Generalizando, como en el caso del análisis cualitativo, podemos obtener una ecuación como

$$A = kB^nC^mD^lF^p \tag{3.31}$$

donde a diferencia de la Ec.(3.27) los valores para las constantes k, n, m, l y p estan totalmente determinados.

Análisis gráfico

Al igual que en el análisis cunatitativo el análisis gráfico se basa en mediciones cuantitativas plasmadas en tablas de valores como en la Ec.(3.28).

La relación entre las cantidades A y B se obtiene graficando los valores a_i y b_i en una gráfica de A vs. B. El lugar geométrico de estos valores nos dice que tipo de relación existe entre A y B. En otras palabras, si los puntos a_i, b_i caen sobre una recta, entonces, la relación entre A y B es lineal y satisface una ecuación de la forma

$$A = cB + b \tag{3.32}$$

donde c es una constante que corresponde al valor de la pendiente de la recta y b es una constante que depende del cruce por el eje de la ordenada cuando la abscisa es cero. El valor de b siempre se puede ajustar, mediante cambios de variable, de tal forma que la recta cruce por cero, lo anterior corresponde a pedir que $b = 0$. En general, al detectar el lugar geométrico de los puntos a_i, b_i es posible obtener la relación

$$A = cB^n \tag{3.33}$$

donde c y n son valores que se pueden determinar facilmente. Si hacemos un cambio de variable y graficamos A vs. B^n obtenemos una recta cuya pendiente corresponde al valor de la constante c.

$$[V] = L^1 M^0 T^{-1} \tag{2.2}$$

la unidad derivada para la velocidad es de dimensión *uno* con respecto a la unidad de longitud, de dimensión *menos uno* con respecto a la unidad de tiempo y de dimensión *cero* con respecto a la unidad de masa, o bien, adimensional con respecto a la unidad de masa. Esto significa, que si tomamos el kilometro como unidad de longitud en lugar del metro y conservamos el segundo como unidad de tiempo entonces tendremos la unidad de velocidad *Kilometro por segundo* que es $(1000)^1$ veces mayor que el *metro por segundo.* Si ahora tomamos la hora como unidad de tiempo en lugar en lugar del segundo y consevamos el metro como unidad de longitud, entonces, la unidad de velocidad *metro por hora* será $(3600)^{-1}$ veces que la unidad *metro por segundo*, o sea, 3600 veces menor que m/s.

Construir una formula dimensional consiste en expresar la magnitud derivada exclusivamente en términos de magnitudes fundamentales. La construcción de las fórmulas dimensionales puede basarse en las propias correlaciones determinantes para las distintas magnitudes físicas, reduciendolas hasta obtener la magnitud derivada deseada en función de puras magnitudes fundamentales, o bien, en función de otras magnitudes derivadas cuya formula dimensional se conozca, por ejemplo, si se desea obtener la formula dimensional para la aceleración usando como correlación determinante

$$a = \frac{dv}{dt} \tag{2.3}$$

tenemos a la aceleración en términos de una magnitud derivada (la velocidad) y una magnitud fundamental (el tiempo), podemos proceder de dos formas. Si ya conocemos la formula dimensional para la velocidad Ec.(2.2), entonces

$$[A] = [\frac{v}{t}] \tag{2.4}$$

la Ec.(2.4) la podemos expresar como

$$[A] = [V][T]^{-1} \tag{2.5}$$

y entonces usando la Ec.(2.2) obtenemos

$$[A] = (L^1 T^{-1}) T^{-1} \tag{2.6}$$