

## ESTÁTICA Y DINÁMICA LEYES DEL MOVIMIENTO

J.R. Martínez

En la unidad anterior hemos analizado algunas situaciones de movimiento, para las cuales la aceleración, como cantidad vectorial, es constante, lo que nos arrojó el tener tres tipos de trayectorias para un objeto en movimiento.

Este análisis lo realizamos usando modelos que nos simulan la situación real; los modelos utilizados son el modelo pictórico, el modelo físico y el modelo matemático. En esta unidad continuaremos nuestro análisis de situaciones de movimiento usando igualmente los modelos mencionados.

El ingrediente nuevo en nuestro análisis será el que se deriva de la pregunta, ¿bajo que condiciones cambia el estado de movimiento de un sistema? En la unidad anterior lo que hicimos fue determinar el, o los estados de movimiento de un sistema físico. El estado de movimiento se manifiesta por el valor particular que asumen sus observables, sus cantidades físicas, que lo definen, en particular la velocidad. Si tenemos el comportamiento de la velocidad, su valor o sus valores, tenemos determinado su estado físico o sus estados físicos de movimiento. Si existe un cambio de velocidad en el sistema en análisis, entonces, tenemos un cambio en el estado físico. Lo que significa que, si existe una aceleración, entonces hay un cambio físico de movimiento, pues su presencia nos asegura un cambio en la velocidad que es la que define el estado físico.

En esta unidad, entonces, nos enfocamos en este problema. El ingrediente que agregamos en nuestro análisis será el concepto de interacción que es el responsable que exista una aceleración que produce un cambio en el estado físico de movimiento, o sea en la velocidad.

Para ello, también agregaremos otros observables necesarios para el análisis descrito. Recuerden que observables significa cantidad física que es susceptible de ser medida. Una observación implica una medición. La cantidad física que agregamos es la cantidad de materia que contiene un cuerpo, la cual es una cantidad escalar cuya unidad de comparación o de medida es el kilogramo en el sistema métrico decimal y que llamaremos masa. Lo que haremos es observar el objeto en movimiento, ahora provisto de masa, y sus consecuencias físicas. Una de sus consecuencias es que, para poder cambiar su estado de movimiento, y se haga presente una aceleración que actúe sobre el objeto, se requiere un proceso de interacción que logre cambiar su velocidad, y aquí la masa es importante pues a mayor masa será más difícil cambiar su estado que con menor masa.

Para ello debe de presentarse una interacción, o sea una acción hacia el objeto que produzca un cambio en su estado de movimiento, en su velocidad.

El proceso de interacción implica la acción de algún agente, algún elemento de la realidad que interaccione con el objeto en movimiento. Nuestro modelo pictórico es una representación gráfica, en dibujo, de la situación real, en él aparecen los elementos presentes en el fenómeno, por ejemplo, si un automóvil se desplaza sobre una carretera, nuestros elementos son el automóvil y la carretera como tal, que suelen dibujarse en el modelo pictórico, junto a los observables que definen su estado de movimiento en un sistema de referencia, observables que eran el desplazamiento, la velocidad y la aceleración en ciertos intervalos de tiempo, como se hizo en la unidad anterior. Estos elementos se describen en la redacción de una situación problemática. Este modelo pictórico nos define el sistema físico, todos los demás elementos que no se describen en la redacción del problema se consideran fuera del sistema; por ejemplo, un pájaro que pasa volando y que no afecta para nada el movimiento del objeto. Ahora requerimos que la redacción nos dé información sobre agentes o elementos que podamos asociar con algún proceso de interacción. Estos agentes o elementos estarán definidos en el sistema físico.

Nuevamente, simplificaremos nuestros casos de análisis y, restringimos nuestros procesos de interacción a situaciones, a) donde el proceso corresponde a una interacción de contacto físico, por un lado, y por el otro, b) a una situación donde la interacción se realiza a distancia. En este último caso la interacción a distancia será la interacción gravitacional, o sea los efectos que causa la masa de la Tierra sobre los objetos que se encuentran en su campo gravitacional. Existen otros tipos de interacciones que no consideraremos.

Tenemos pues interacciones de contacto y interacciones de no contacto. Las de contacto son todas aquellas situaciones que impliquen un contacto con el objeto en movimiento y las de no contacto serán exclusivamente la debida a la interacción gravitacional terrestre.

De esta manera tenemos que el contacto entre objetos implica un proceso de interacción que llamamos de contacto. Ejemplo, el automóvil sobre la carretera implica una interacción de contacto entre el automóvil y la carretera que tiene como resultado que el automóvil no caiga, si quitamos la carretera este caerá. Como el ejemplo del objeto que se desplazaba sobre la superficie y llegaba a la orilla de esta cayendo y describiendo así una trayectoria parabólica, momento en que se manifestaba una aceleración debida a esta interacción gravitacional, que llamamos aceleración debida a la interacción gravitacional  $\mathbf{a}_g$  que tenía una dirección vertical hacia abajo y un valor de  $9,8 \text{ m/s}^2$ .

El resultado final de cualquier proceso de interacción es la presencia de una aceleración que define la intensidad de esta interacción, y otra cantidad asociada con el mecanismo de la interacción, o sea el modo en que se manifiesta la interacción y esta cantidad o observable

será definido como fuerza, cantidad también vectorial como veremos y que es medida en el sistema métrico decimal con las unidades de “Newton” que corresponde al producto de (kilogramo)(metro)/(segundo)<sup>2</sup>.

Con estos nuevos observables, nuestra observación del sistema se enfoca ahora a cuestionamientos como: para cambiar el estado de movimiento de un objeto que tenga una cierta velocidad, cómo debe de ser una interacción para que cambie su estado, o su velocidad a cierta nueva velocidad; por ejemplo si un objeto viene moviéndose hacia nosotros y queremos cambiar su estado de movimiento de tal manera que se pare el objeto o sea adquiera una velocidad con valor cero, ¿cómo debemos interaccionar con este objeto para lograr que se detenga?, serían nuestras nuevas interrogantes que orientan la forma de observar el sistema, o sea de medir los estados físicos, y para ello requerimos de nuestros nuevos observables, que son la masa y la fuerza.

En el ejemplo anterior, cuando un objeto se dirige hacia nosotros con una velocidad, reaccionamos a fin de evitar el golpe. La velocidad es un factor importante en esta precaución, pues si es alta o baja, el golpe dependerá en gran medida de ello. Le tememos a un objeto que se aproxima a gran velocidad hacia nosotros. En realidad, la velocidad no es determinante en esta precaución. Esto dependerá del tipo de objeto que se mueva hacia nosotros, si es una mosca su velocidad no será gran preocupación, en cambio sí es un automóvil la cosa es diferente. De igual manera si un automóvil se dirige hacia nosotros a una velocidad muy pequeña, a vuelta de rueda digamos, nuestro temor será también menor. En estos casos a lo que tememos es a la “cantidad de masa que lleva cierta velocidad”, a este concepto le podemos asociar un observable cuya cantidad física le llamamos “momento” o más apropiadamente “cantidad de movimiento”, el cual es una cantidad vectorial, como veremos adelante. Sus unidades, derivadas, en el sistema métrico decimal, no tienen un nombre específico y son de (kilogramos)(metro)/segundo.

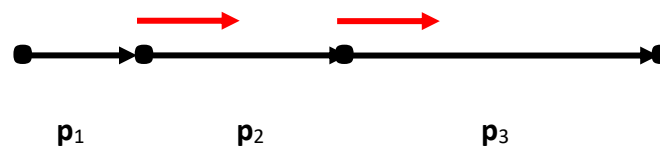
Nuestra interrogante de cómo detener un objeto que se dirige hacia nosotros, implica interaccionar con este objeto con una interacción cuya intensidad sea suficiente para detenerlo, llevar su velocidad a cero, provocando con la interacción una aceleración adecuada y un mecanismo de interacción que provoque un contacto con el objeto, que es aplicar una fuerza suficiente para detenerlo.

En resumen, el proceso de interacción implica una intensidad y un mecanismo; la intensidad de esta interacción es la aceleración y el mecanismo físico la fuerza, que provocan un cambio en su estado de movimiento, o sea, un cambio, en su cantidad de movimiento, que implica el cambio en la velocidad de la masa del objeto.

Con estas cantidades nuestro sistema físico lo podemos representar ahora como la función  $f(\mathbf{p}, \mathbf{F}, t)$ , donde  $\mathbf{p}$  es la cantidad de movimiento o “momento” (nuestra notación puede

confundirla con la posición que usamos en la unidad anterior, así que de aquí en adelante  $\mathbf{p}$ , significará cantidad de movimiento), La masa del objeto queda implícita en los observables; fuerza y cantidad de movimiento que son definidos a partir de nuestros anteriores observables, que siguen presentes en la anterior función, a través de la cantidad de movimiento y de la fuerza. Las definiciones operacionales de estos nuevos observables ya definidos líneas arriba son:  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ , que son cantidades físicas que, por su relación, tienen las unidades derivadas de las expresiones anteriores que operan como correlaciones determinantes, y cuyas direcciones son las mismas que la dirección de la aceleración y de la velocidad, respectivamente, pues la masa es una cantidad escalar que justo escala los vectores de la aceleración y de la velocidad. Así un objeto con una cierta velocidad y con una masa muy grande, arroja una alta “cantidad de movimiento”  $\mathbf{p}$ , y una fuerza  $\mathbf{F}$ , grande con la misma dirección que la velocidad y su aceleración, respectivamente.

El diagrama de movimiento de un sistema, observado mediante los procesos de interacción será ahora de la siguiente forma:



Las flechas que unen los puntos son ahora la cantidad de movimiento y las flechas rojas son ahora la fuerza. Esto es los puntos tienen asociados ahora, no solo la posición del objeto, sino la posición de la masa del objeto. Los puntos contienen la masa.

Estos diagramas, entonces nos dan las relaciones entre estas cantidades físicas, que obtenemos si representamos matemáticamente el diagrama, tal como se hizo en la unidad anterior o sea el cambio de estado: representado por el cambio en la cantidad de movimiento  $\mathbf{p}$ ,

$$\mathbf{F} = \mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i = \Delta\mathbf{p}$$

Recordando que en el diagrama de movimiento los puntos representan el objeto situado en iguales intervalos de tiempo, que independientemente de su valor asumimos como la unidad  $y$ , además apelando a la condición de que para ser una relación entre cantidades físicas debe de ser dimensionalmente correcta, la ecuación que define esta situación, obtenida del diagrama de movimiento será:

$$\mathbf{F} = \Delta\mathbf{p}/\Delta t$$

Que es la ecuación de movimiento, la ecuación que nos describe los estados de movimiento de un sistema físico. Que puede reescribirse como:

$$\mathbf{F} = \Delta\mathbf{p}/\Delta t = \Delta(m\mathbf{v})/\Delta t = m\Delta\mathbf{v}/\Delta t = m\mathbf{a}$$

Donde consideramos que la masa asociada a un objeto no cambia, lo cual es una simplificación pues ésta en ciertas condiciones si puede cambiar. Así obtenemos que

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

En el diagrama de movimiento anterior, la fuerza se representa como constante, para calcular la fuerza en cada punto del diagrama, tendríamos la serie de relaciones, que nos da el comportamiento del objeto en cada intervalo de tiempo:

$$\mathbf{F} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_2$$

El conjunto de ecuaciones asociados al diagrama de movimiento, tal como se hizo en la unidad anterior, modelo matemático asociado al modelo físico (diagrama de movimiento) serán:

$$\mathbf{p}_f = \mathbf{p}_i + \mathbf{F}t$$
$$\mathbf{p}_m = (\mathbf{p}_i + \mathbf{p}_f)/2$$

El sistema físico queda definido por todos los elementos, objetos, que se describen en la redacción de una situación de movimiento, y de los cuales ubicamos observables cuyas cantidades nos sirven para caracterizar el sistema de movimiento. Todos aquellos elementos no descritos, que no pertenecen al sistema quedan fuera del sistema físico y no influyen en el comportamiento físico del sistema, a menos, que eventualmente puedan interactuar con el sistema, cuestión que analizaremos en la siguiente unidad.

Así, dentro del sistema pueden suceder procesos de interacción, ya sea de contacto o de largo alcance, que provocan cambios en los estados de movimiento. Cuando sucede esto se manifiesta intercambio de energía, o sea el proceso de interacción es un proceso que requiere energía y, donde se manifiestan cambios de energía entre los objetos y elementos que participan en la interacción.

La energía, entonces, la podemos asociar a los cambios de velocidad y de posición o sea el desplazamiento del objeto provisto de masa.

En general el sistema físico tiene una cierta energía  $E$ , que se forma de las respectivas energías que tienen sus componentes, o sea, los elementos que conforman el sistema, los

cambios de estado físico suceden bajo cambios de energía de estos elementos, componentes del sistema, que se producen en la medida que exista interacción entre estos elementos. Todos los contactos del objeto con el resto de los elementos indican interacción de contacto, y cada interacción se mide por su intensidad, que es la aceleración y el mecanismo de interacción que es la fuerza. Si el sistema, el fenómeno de movimiento, se encuentra en presencia del campo gravitacional, lo que por lo regular sucede en todas las situaciones de movimiento descritas en la Tierra, entonces tenemos en todo momento una interacción de largo alcance que es la interacción gravitacional, cuya intensidad es la  $a_g$  y su mecanismo que es la fuerza se asocia con el peso del objeto " $w$ ", vector que también apunta verticalmente hacia abajo.

Así, por lo pronto, consideramos que la energía necesaria para un proceso de interacción procede del mismo sistema, o sea, de la energía de los propios elementos que conforman el sistema.

Como consecuencia del proceso de interacción que utiliza energía del propio sistema, el objeto cambia su estado de movimiento, cambiando así su velocidad y su posición en el campo gravitacional. La energía del objeto cambia en la medida que cambia su velocidad y su posición en el campo gravitacional.

Estos cambios los denominamos energía cinética, que es una energía de movimiento y energía potencial que es una energía de posición en el campo gravitacional, terrestre en nuestro caso.

Así la energía de movimiento, energía cinética la definimos como  $E_c = mv^2/2$  y la energía potencial como  $E_p = m_a g h = w h$ , las cuales son cantidades escalares.

El proceso de interacción que se lleva a cabo produce un cambio de energía de movimiento del objeto bajo estudio y un posible cambio de energía potencia cuando se manifiesta una interacción de largo alcance. En el caso de interacción de contacto, el mecanismo de interacción que es mediado por una fuerza, se aplica al objeto durante cuando éste se está desplazando, y el efecto del mecanismo durante una distancia, conduce a otra cantidad, otro observable, que le llamamos trabajo, el cual nos mide la eficiencia de una fuerza para cambiar el estado de movimiento en una dirección determinada, esto es  $T = \mathbf{F} \cdot \mathbf{d} = F d \cos \theta$ , para el caso lineal cuando la fuerza es paralela al desplazamiento. Así el trabajo matemáticamente es la proyección de la fuerza sobre el desplazamiento, o sea, el producto escalar, producto punto entre el vector fuerza y el vector desplazamiento. El trabajo, entonces, es equivalente al cambio de energía cinética del objeto en movimiento. Como podemos deducir de las ecuaciones cinemáticas correspondientes al diagrama de movimiento que hemos introducido líneas arriba.

$$\mathbf{v}_f = \mathbf{v}_i + \mathbf{a}t$$

$$v_f^2 = v_i^2 + 2ad$$

Si agregamos la masa como observable en nuestro sistema, que significa multiplicar las ecuaciones por la masa, las ecuaciones se transforman a:

$$m\mathbf{v}_f = m\mathbf{v}_i + m\mathbf{a}t$$

$$mv_f^2 = mv_i^2 + 2mad$$

Usando las definiciones operacionales de cantidad de movimiento, fuerza y energía cinética, obtenemos que:

$$\mathbf{p}_f = \mathbf{p}_i + \mathbf{F}t$$

$$mv_f^2 - mv_i^2 = 2Fd$$

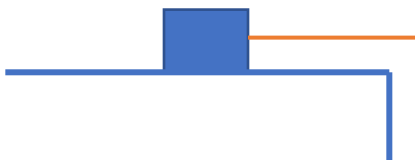
$$mv_f^2/2 - mv_i^2/2 = T$$

$$\Delta E_c = T$$

Por lo que el conjunto de ecuaciones que describen el diagrama de movimiento, que es nuestro modelo físico, incorporan ecuaciones derivadas de las ecuaciones originales, que implican las cantidades introducidas en esta unidad; aunque estas están implícitas en el diagrama y requerimos nuevos esquemas de diagramación para representar de manera directa las nuevas cantidades físicas, esto es, enriquecer nuestros modelos. Así el proceso de interacción enriquece la descripción física dinámica de los sistemas de movimiento.

Antes de entrar a detallar cómo cambian nuestros modelos de análisis al incorporar el proceso de interacción, analizaremos algunos casos de interacción de contacto que serán de utilidad en la descripción de una gran cantidad de situaciones físicas a las que se enfrentarán más adelante con situaciones problemáticas.

Consideremos un objeto que se encuentra sobre una superficie, digamos una mesa, y jalamos de él con una cuerda atada al objeto. Un esquema de modelo pictórico sería el siguiente: tenemos como elementos del sistema, el objeto, la mesa y la cuerda con que jalamos, el diagrama quedaría algo así como:



Tenemos dibujados los elementos identificados.  
Identificamos interacciones de contacto

Sobre el objeto están en contacto la cuerda y la mesa. Supongamos que el objeto está en reposo y que al jalar el objeto no logra moverse, así su situación de movimiento es  $\mathbf{v} = 0$  y

después de la interacción sigue sin moverse, entonces la intensidad de la interacción total es  $\mathbf{a} = 0$ .

Las interacciones de contacto identificadas en el ejemplo anterior son dos, la debida a la cuerda y la debida a la mesa, cada una de ellas, generalizando lo que vimos más arriba, tiene una intensidad, medida por una aceleración y, un mecanismo de interacción medido por la fuerza, interacciones que se suman en el sistema produciendo una intensidad total de interacción, que en nuestro caso de análisis es cero pues el objeto no cambia su velocidad que es cero durante la interacción, y un mecanismo total que es la fuerza total sobre el objeto. Tanto la intensidad total de la interacción, su aceleración total, y su fuerza total que es el mecanismo total de interacción, es la suma de cada una de las intensidades y mecanismos de las interacciones involucradas:  $\mathbf{a}_c$ ,  $\mathbf{a}_m$ ,  $\mathbf{F}_c$ ,  $\mathbf{F}_m$  (los subíndices “c” y “m”, indican cuerda y mesa). Expresado lo anterior en ecuación, tenemos:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_c + \mathbf{a}_m$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_c + \mathbf{F}_m$$

Estas ecuaciones son consistentes pues si multiplicamos la primera ecuación por la masa del objeto, sobre el cual se aplican las interacciones, obtenemos la segunda ecuación. Nuestra situación de movimiento para el caso que analizamos corresponde a,  $\mathbf{a} = 0$ , por lo que de las ecuaciones anteriores obtenemos  $\mathbf{a}_c = -\mathbf{a}_m$  y por lo mismo,  $\mathbf{F}_c = -\mathbf{F}_m$ . Lo que indica que estas cantidades tienen la misma magnitud y, sus direcciones apuntan horizontalmente en direcciones contrarias, hacia la izquierda y hacia la derecha, respectivamente.

La acción de la mesa sobre el objeto es mantener al objeto en su estado de movimiento, si es en reposo mantenerlo en reposo, y “oponerse” al posible movimiento del objeto ante agentes extraños, como el caso de la cuerda en el ejemplo, en cualquier dirección sobre la superficie de la mesa. Si la cuerda pretende moverlo a la derecha, la acción de la mesa sobre el objeto es oponerse a esta acción manifestando una fuerza, como mecanismo y una aceleración como intensidad, que tienen dirección a la izquierda, con magnitud igual a las correspondientes cantidades asociadas a la interacción de la cuerda sobre el objeto.

Todos, en algún momento, han experimentado la situación anterior; se han visto en la necesidad de mover algún objeto sobre una superficie, jalando o empujando sobre este y han podido constatar que el moverlo es más complicado en la medida que el peso del objeto sea mayor, además del tipo de material del que esté hecho, así como el material y tipo de superficie. Si la superficie es liza, resultará más fácil moverlo que si la superficie es rugosa. Otro factor es la superficie del objeto que descansa sobre la mesa, si la superficie es grande o pequeña, la facilidad para moverlo dependerá de ella, una superficie grande complica el movimiento comparado con una superficie pequeña. Varios son los factores que influyen en el movimiento del objeto sobre una superficie; una manera de incluirlos implícitamente



es introducir un factor numérico obtenido de manera experimental, donde se incluyen todos los factores asociados al tipo de superficies en contacto, este parámetro es el coeficiente de fricción que puede ser encontrado experimentalmente y conociéndolo es posible medir los parámetros asociados a la interacción, como la fuerza o la aceleración de la interacción entre el objeto y la mesa. Otra cuestión que pueden corroborar con la experiencia, es que resulta más complicado mover un objeto que se encuentre en reposo, que el mismo objeto que ya se mueva con una velocidad; de hecho si realizan la experiencia de mover el objeto desde el reposo y tratar de medir la fuerza que ejercen para ello, encontrarán que una vez se encuentre en movimiento requieren una fuerza de menor intensidad para lograr que el objeto se siga moviendo, así existen dos tipos de parámetros para incorporar toda esta información de las superficies en contacto, agregamos para ello otro parámetro para el coeficiente de fricción, teniendo así dos tipos de coeficientes: el coeficiente de fricción estático ( $\mu_e$ ) y el coeficiente de fricción cinemático ( $\mu_c$ ) aplicados para cuando el objeto se encuentra en reposo o en movimiento, respectivamente. Estos coeficientes no son cantidades físicas, incluye los efectos de cantidades físicas sobre el movimiento del objeto, pero a través de un número fraccionario que globalmente nos dice que tanto afectan los parámetros de las superficies de contacto sobre el movimiento del objeto, desde efectos suaves o nulos, hasta efectos severos o extremos, de esta manera los coeficientes van en un rango de cero a uno, para representar los casos anteriores. Es común asociar las fuerzas (mecanismo de interacción) de una superficie sobre el objeto como fuerza normal, cuya dirección es perpendicular a la superficie, en nuestro caso será verticalmente hacia arriba y es la causante que el objeto no caiga al suelo debido a la interacción de largo alcance que es la gravitacional, y la fuerza de fricción que es la responsable que la superficie impida que el objeto se mueva sobre la superficie, su dirección se determina por la acción dinámica del resto de las interacciones que tratan de inyectar movimiento al objeto, oponiéndose a estas. Ambas fuerzas son proporcionales en magnitud al peso del objeto.

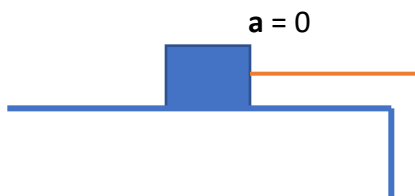
El peso es la fuerza responsable que produce que un objeto caiga, por lo que la fuerza normal "N" es  $\mathbf{N} = -\mathbf{w} = -m\mathbf{a}_g$ . La anterior es su valor máximo, pues en este caso el peso y la normal son verticales. Si la mesa se encuentra inclinada, hacia arriba o hacia abajo, facilitará o complicará el movimiento del objeto, lo que indica que el coeficiente de fricción ha cambiado, pues la fuerza normal cambiará al ser siempre perpendicular a la superficie, mientras el peso siempre es vertical hacia abajo. La fuerza de fricción puede ser cinética o estática dependiendo de la situación de movimiento del objeto y se relaciona con el peso a través de la fuerza normal en cuanto a magnitud; su relación es:  $f_e = \mu_e N$ , y,  $f_c = \mu_c N$ .

La visualización del proceso de interacción, con sus cantidades aceleración y fuerza asociadas a las interacciones, se hace a través de los modelos pictórico y modelo físico para estas cantidades, que se suman a las representaciones que para estos modelos hemos

realizado en la unidad anterior. El modelo físico, en este caso, se le denomina diagrama de cuerpo libre, que es una representación gráfica de los vectores asociados a la interacción.

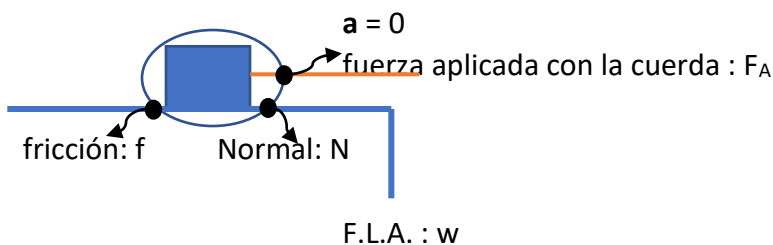
Para ejemplificar el uso de modelos, continuemos con el ejemplo que estamos tratando, y lo ilustramos para diferentes casos de movimiento. Consideremos primero que el objeto se encuentra en reposo y que, al interactuar con la cuerda y la mesa, el objeto continúa en reposo.

El modelo pictórico nos permite identificar las diversas interacciones que experimenta el objeto; para obtenerlo, identificamos los elementos del sistema de acuerdo con la redacción del problema o de la situación física descrita y hacemos el dibujo con estos elementos, como se realizó anteriormente, agregando la situación de movimiento con información de la aceleración total (intensidad de la interacción total) a un costado del dibujo. Así tenemos:



A continuación, dibujamos un círculo estrecho que encierre justo al objeto cuyo movimiento deseamos caracterizar, con el fin de identificar interacciones de contacto. Cada intersección entre el círculo y los elementos del dibujo corresponde a una interacción, misma que identificamos con un punto negro y que debemos de etiquetar identificando el mecanismo de interacción, o sea la fuerza, como se indica en el siguiente dibujo, agregando la letra con que la identificaremos; además, agregamos a un costado la fuerza asociada a la interacción de largo alcance, interacción gravitacional cuya fuerza es el peso del objeto. La escribimos a un costado por no ser interacción de contacto. Con ello tenemos dibujadas todas las interacciones de contacto y de largo alcance involucradas en la situación física:

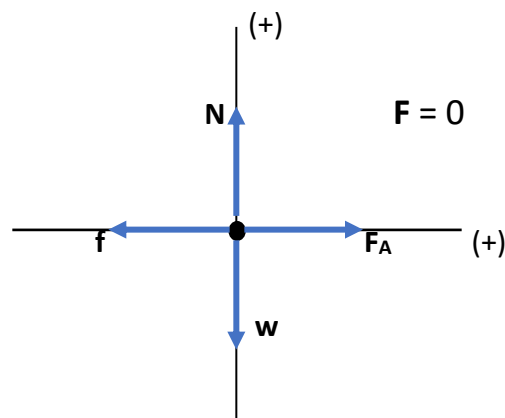
### Modelo Pictórico



En el dibujo anterior tenemos completo el modelo pictórico de interacciones, cuyos procedimientos para su obtención fueron descritos en el párrafo anterior.

El modelo físico correspondiente es el diagrama de cuerpo libre, donde al igual que en el caso del diagrama de movimiento, reducimos el objeto a una partícula con masa, que es representada por un punto, con un sistema de referencia para la medición de los vectores asociados al proceso de interacción (fuerzas y aceleración), seleccionado de acuerdo con la simetría de la situación física y en cuyo origen (centro) se coloca la partícula que representa al objeto. Partiendo del origen se dibujan los vectores de las fuerzas identificadas en el modelo pictórico, siempre emergiendo del objeto, nunca hacia el objeto, respetando su magnitud, si es que fuera conocida y estrictamente representando su dirección (en nuestro ejemplo son, de contacto: la fuerza de fricción, la fuerza normal y la fuerza aplica por la cuerda, y largo alcance: peso). A un costado del diagrama se escribe la situación del movimiento, con la información de la aceleración total de la interacción, la que aparece a un costado del modelo pictórico, transformada en fuerza (mecanismo de la interacción total), agregando una flecha que representa su dirección, la cual, por convención tomaremos como positiva en el sistema de referencia, de lo contrario se deberá indicar las direcciones positivas en el sistema de referencia. Con esto el modelo físico de la situación anterior queda como:

**Modelo Físico  
(diagrama de cuerpo libre)**



Con los modelos pictórico y físico, tenemos descritas las cantidades físicas y sus relaciones (ecuaciones de movimiento), con ellas transcribimos las ecuaciones gráficas al modelo matemático, el cual nos queda:

**Modelo Matemático**

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_A + \mathbf{N} + \mathbf{W} + \mathbf{f} = 0$$

Que expresada en componentes vertical y horizontal nos queda el par de ecuaciones de magnitudes como:

$$F_A - f = 0$$

$$N - W = 0$$

**Ejercicio 1:** repetir el ejemplo anterior, pero considerando que al jalar la cuerda el objeto se mueve con una aceleración constante hacia la derecha.

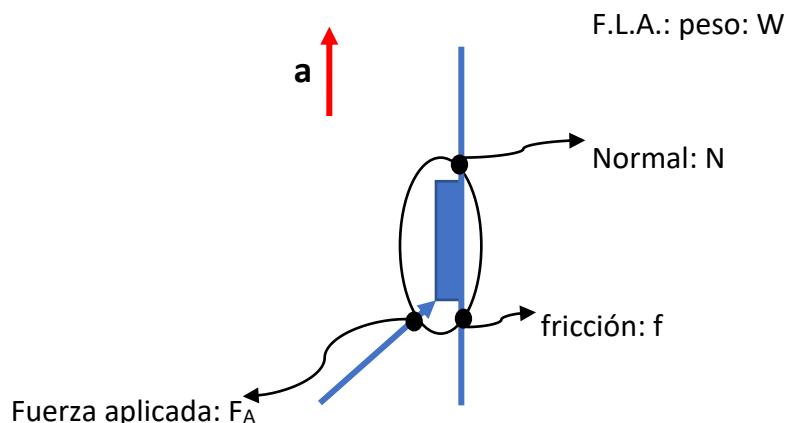
En el ejemplo anterior el objeto no se mueve por lo que su desplazamiento es cero, lo que indica que el trabajo realizado por cada una de las fuerzas asociadas a los procesos de interacción detectados, tanto de contacto como de largo alcance, es cero para cada una de ellas y, por lo tanto, el trabajo total es igualmente cero, lo que indica que no existe un cambio en la energía cinética del objeto.

Una de las aplicaciones muy recurrentes de casos en los cuales los objetos permanecen en reposo ante procesos de interacción, son los sistemas en los cuales se diseñan arreglos para que el objeto, justo, permanezca en reposo, como son los sistemas de cuerdas que mantienen suspendido al objeto, como arreglos de semáforos entre otros.

Tenemos la siguiente situación problemática: Considere un libro de 0,3 Kg, que apoyamos sobre una superficie vertical con coeficiente de fricción cinética de 0,1, y al que empujamos oblicuamente hacia arriba, con un ángulo de treinta grados respecto a la superficie. Si al empujar el libro se encuentra en reposo y al ejercer la fuerza oblicua indicada, de 9 Newtons, encuentre la aceleración del libro y diga cuál es el trabajo total y el trabajo de cada una de las fuerzas involucradas al moverse el objeto 1,5 metros. ¿Cuál es la energía cinética del objeto después de haber recorrido los 1,5 metros?

Procedemos el análisis construyendo paso a paso nuestros modelos, comenzando por el modelo pictórico. Identificamos en el sistema los siguientes elementos: el libro, la superficie vertical y la fuerza aplicada oblicuamente hacia arriba, con ellos el dibujo correspondiente al modelo pictórico completo. Nuestro sistema particular de análisis es el libro:

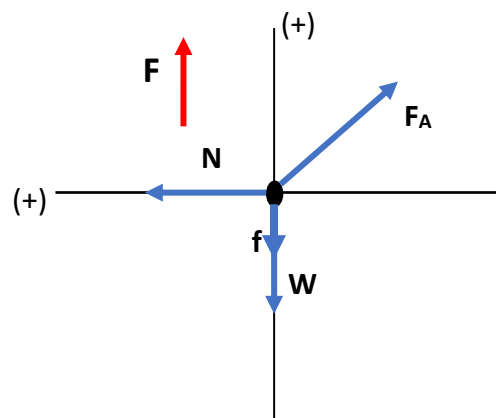
### Modelo Pictórico



Como podemos observar en el modelo pictórico encontramos tres intersecciones correspondientes a las interacciones de contacto que identificamos como fuerza aplicada, fricción y normal, mientras que para la interacción de largo alcance tenemos, como sucede en general, el peso. Tenemos identificado también la situación de movimiento que corresponde a una aceleración del libro hacia arriba de la superficie.

Con esta información, construimos el modelo físico que es nuestro diagrama de cuerpo libre, representando gráficamente las fuerzas de contacto y de largo alcance, así como la fuerza total (fuerza neta) identificadas, siguiendo los pasos para su construcción, explicados anteriormente.

### Modelo Físico



El modelo físico representa gráficamente las ecuaciones para el sistema de interacción, de aquí el modelo matemático queda:

### Modelo Matemático

$$\mathbf{F} = \mathbf{N} + \mathbf{F}_A + \mathbf{f} + \mathbf{W} = m\mathbf{a}$$

Escribiendo la ecuación vectorial para componentes horizontal y vertical, de acuerdo con el sistema de referencia (signos positivos) tenemos, nombrando "x" y "y" las direcciones horizontal y vertical, respectivamente:

$$\begin{aligned} F_{Ay} - W - f &= F = ma \\ N - F_{Ax} &= 0 \end{aligned}$$

Para calcular la aceleración que es una de las cantidades que nos piden, usamos la primera ecuación de componentes despejando la aceleración:

$$\begin{aligned} a &= (F_{Ay} - W - f)/m, \\ \text{donde } F_{Ay} &= F_A \cos 30^\circ = 9 \text{ Newton } (0,866) = 7,794 \text{ Newton} \\ W &= m a_g = 0,3 \text{ Kg } (9,8 \text{ m/s}^2) = 2,94 \text{ Newton} \end{aligned}$$

$$f = \mu_c N$$

Todas las cantidades son conocidas a excepción de la fuerza normal, la cual la obtenemos de la segunda ecuación de componentes.

$$N = F_{Ax} = F_A \text{ sen } 30^\circ = 9 \text{ Newton } (0,5) = 4,5 \text{ Newton}$$

$$f = 4,5 \text{ Newton } (0,1) = 0,45 \text{ Newton}$$

con esto, a, es:  $a = (F_{Ay} - W - f)/m = (7,794 - 2,94 - 0,45) \text{ Newton} / 0,3 \text{ Kg} = 14,68 \text{ m/s}^2$

Para calcular el coeficiente de fricción estática, usamos la primera ecuación de componentes justo cuando el libro comienza a moverse, donde velocidad es constante y prácticamente cero, lo que es equivalente a tener una aceleración igual a cero, así la ecuación queda:

$$F_{Ay} - W - f = 0 = F_{Ay} - W - \mu_e N = 0$$

$$\mu_e = (F_{Ay} - W)/N = (7,794 - 2,94)/4,5 = 1,04$$

El trabajo total y el trabajo de cada una de las fuerzas involucradas lo calculamos de la siguiente forma:

$$T = T_{Fa} + T_f + T_w = \mathbf{F} \cdot \mathbf{d} = ma d = 0,3 \text{ Kg } 14,68 \text{ m/s}^2 1,5 \text{ m} = 6,606 \text{ Newton m}$$

El trabajo realizado por la fuerza aplicada es  $T_{Fa} = \mathbf{F}_A \cdot \mathbf{d} = F_A d \cos 30^\circ$ , el desplazamiento es vertical hacia arriba y la fuerza aplicada hace un ángulo de  $30^\circ$  con el eje vertical, así su proyección es la indicada. Su valor es  $T_{Fa} = 7,794 \text{ Newton } 1,5 \text{ m} = 11,691 \text{ Newton m}$ .

El trabajo realizado por la Normal es  $T_N = \mathbf{N} \cdot \mathbf{d} = 0$ , pues la fricción es perpendicular al desplazamiento su proyección es cero.

El trabajo realizado por la fricción es:  $T_f = \mathbf{f} \cdot \mathbf{d} = fd \cos 180^\circ$ , sus direcciones son antiparalelas, así  $T_f = 0,45 \text{ Newton } 1,5 \text{ m} = - 0,675 \text{ Newton m}$ .

El trabajo realizado por el peso es:  $T_w = \mathbf{W} \cdot \mathbf{d} = - 2,94 \text{ N } 1,5 \text{ m} = - 4,41 \text{ Newton m}$

Si sumamos todos estos trabajos individuales obtenemos el valor del trabajo total obtenido arriba.

$$T = T_{Fa} + T_f + T_w = (11,691 - 4,41 - 0,675) \text{ Newton m} = 6,606 \text{ Newton m}$$

El trabajo total realizado es igual al cambio en energía cinética del libro  $T = \Delta E_c = E_{cf} - E_{ci}$ ; en el intervalo de 1,5 metros el libro parte del reposo por lo que la energía cinética inicial es cero, así que el trabajo es directamente la energía cinética que el libro lleva cuando a recorrido 1,5 metros, entonces  $T = E_{cf} = 6,606$  Newton m.

Las unidades de Newton metro que obtuvimos en el cálculo del trabajo, las denominamos Joules (J), las cuales están referidas a energía.

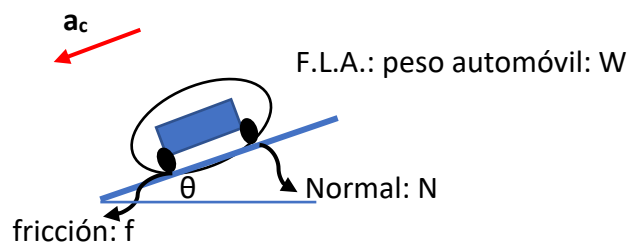
Para el caso de movimiento circular procedemos de igual manera, aunque en este caso las situaciones de movimiento implican la aceleración centrípeta, que puede ser originada de interacciones de contacto o de interacciones de largo alcance, nuevamente el ejemplo sería el campo gravitacional. En estos casos la aceleración centrípeta se asocia a una fuerza que llamamos igualmente centrípeta y, si se asocian a interacciones, entonces son sus intensidad y mecanismo de interacción, respectivamente.

Para tener la gama de ejemplos, trataremos un caso de movimiento circular, planteado a través de procesos de interacción.

Considere un automóvil de masa  $m$ , que recorre una carretera a velocidad constante,  $v$ , y toma una curva que tiene una inclinación  $\theta$  y radio de curvatura  $r$ , el automóvil conserva constante su magnitud de velocidad manteniéndose en la curva, cuya carretera y neumáticos del automóvil presentan un coeficiente de fricción  $f_c$ ,

Para construir el modelo pictórico requerimos estar realizando análisis del sistema, en primer lugar, la redacción nos permite identificar elementos del sistema general, estos son la carretera y el automóvil. La curva de la carretera la consideramos circular de tal manera que cuando el automóvil toma ésta presenta una trayectoria circular recorrida a velocidad con magnitud constante; sabemos que para que pueda tener esta trayectoria la situación de movimiento requiere tener una aceleración constante hacia el centro del círculo de la trayectoria. El dibujo del modelo pictórico lo hacemos con un corte transversal de la curva, esto es, imagine que observa el automóvil por la parte trasera directo sobre la carretera.

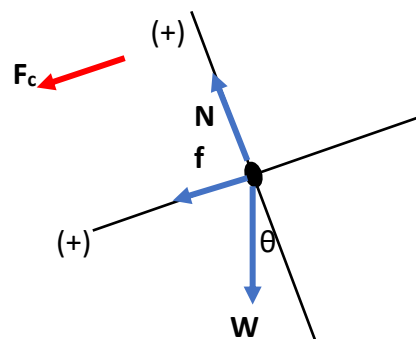
### Modelo Pictórico



El sistema particular es el automóvil de quien queremos realizar el análisis dinámico, así lo encerramos en un círculo e identificamos intersecciones que nos indican las interacciones de contacto presentes, en el diagrama observamos dos en cada una de las llantas que asociamos a fuerzas, las cuales son la fricción y la normal, por estar en la superficie de contacto. De esta forma solamente tenemos del proceso de interacción, tres fuerzas, la fricción y la normal que son de contacto y el peso que es la fuerza de largo alcance. La situación de movimiento corresponde a una aceleración hacia el centro de la curva que es la aceleración centrípeta, que aquí representa la intensidad total de la interacción.

El modelo físico lo construimos a partir del modelo pictórico, representando las fuerzas identificadas en un sistema de referencia seleccionado aprovechando la simetría del sistema, cuyo centro representa el automóvil reducido a un punto, transformado en partícula de masa  $m$ . Noten la dirección de la fuerza de fricción, oponiéndose al movimiento inercial del automóvil que en la curva tendería a salir de la misma, la fuerza de fricción asegura que permanezca en la curva aunado al peralte que es la inclinación de la curva. Si la inclinación es cero, o sea si tenemos una curva plana, entonces la fricción es la única componente que mantendrá al automóvil sobre la curva.

### Modelo Físico



De aquí obtenemos el modelo matemático que son las ecuaciones representadas en el diagrama de cuerpo libre, que son nuestro modelo físico.

### Modelo Matemático

$$\mathbf{F}_c = \mathbf{N} + \mathbf{f} + \mathbf{W} = m\mathbf{a}_c$$

Expresando la ecuación en componentes obtenemos el par de ecuaciones:

$$\begin{aligned} N - W_y &= 0 \\ W_x + f &= F_c = ma_c \end{aligned}$$



La dirección de estas cantidades físicas ya está contemplada en los signos respectivos, por lo que las ecuaciones son de magnitudes. Desarrollando las ecuaciones obtenemos:

$$\begin{aligned}N - W \cos \theta &= 0 \\W \sin \theta + \mu_c N &= mv^2/r\end{aligned}$$

Con los análisis realizados al construir los tres modelos, se está en condiciones de poder resolver cualquier situación problemática, estableciendo estrategias para medir o cuantificar cualquier cantidad solicitada.

Para finalizar la unidad de estudio 3 y 4, introducimos una nueva cantidad relacionada con el trabajo; el trabajo lo hemos definido como la eficiencia de una interacción mediada por una fuerza para desplazar el objeto una cierta distancia en una dirección determinada. Este requisito vectorial nos conduce a que, a pesar de tener una fuerza ejercida sobre un objeto, este no necesariamente realiza un trabajo pues si la fuerza es aplicada perpendicularmente al desplazamiento deseado, su trabajo será cero, en este sentido la eficiencia de la fuerza para realizar esa tarea de mover el objeto una distancia con dirección específica será nula y la manera más eficiente será aplicar la fuerza de forma paralela al desplazamiento deseado. En el ejemplo anterior hemos realizado esos cálculos y observamos como se calcula dicha eficiencia (trabajo) a partir de cantidades vectoriales para obtener una cantidad escalar que nos mide el trabajo, la eficiencia de la fuerza aplicada.

Aquí podemos agregar otra interrogante y preguntarnos que tan rápido se realiza la tarea de mover el objeto en una dirección determinada aplicando una fuerza sobre él. La rapidez de realización del trabajo que podemos expresarlo como trabajo realizado en un intervalo de tiempo:  $T/\Delta t$ , y a esta cantidad le llamamos potencia "P", de esta manera la potencia es la rapidez en que se realiza un trabajo, la cual es una cantidad escalar medida en las unidades Joules/segundo (J/s), cantidad que definimos como unidad derivada Watts o vatios (W, no confundir con la cantidad física peso):

$$P = T/\Delta t = \mathbf{F} \cdot \mathbf{d} / \Delta t = \mathbf{F} \cdot (\mathbf{d}/\Delta t) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$$

La potencia entonces puede calcularse a través de las anteriores relaciones, ya sea calculando el trabajo y luego midiendo su rapidez, o efectuando el producto escalar entre la fuerza aplicada y la velocidad del objeto.

Una simplificación para nuestros sistemas físicos ha sido el considerar constantes algunas de las cantidades físicas tratadas. Por lo regular en los procesos de interacción consideramos situaciones de movimiento para las cuales la aceleración es constante como hemos estado viendo, y en el caso más reciente de aplicación de fuerzas sobre objetos, como parte del proceso de interacciones hemos considerado que la fuerza aplicada es

constante. De nuevo extendemos esta condición al caso de la potencia, o sea sistemas donde la potencia es constante. De esta manera, la condición, nos permite escribir la potencia en términos del cambio en el estado de movimiento asociado a la energía cinética, como lo hemos hecho para el trabajo:

$$P = T/\Delta t, \text{ entonces, } P \Delta t = T = \Delta E_c$$

Que es valida solo si la fuerza y la potencia son constantes. Lo que nos dice que el tiempo que tarda un objeto en acelerar de una velocidad a otra es proporcional a la variación de la energía cinética. Información que es de utilidad en el caso de los motores que mueven objetos, como ascensores, poleas o automóviles.

Una fuerza constante actuando sobre un objeto, además de los efectos ya discutidos que tiene sobre el movimiento de los objetos, produce un cambio en la cantidad de movimiento del objeto. Este cambio es proporcional a la fuerza aplicada por el tiempo en el cual estuvo aplicada dicha fuerza.  $\Delta p = Ft$ , a esta cantidad le llamamos impulso, en otras palabras, una fuerza constante actuando sobre un objeto durante un intervalo de tiempo, efectúa un impulso "I" que produce un cambio en la cantidad de movimiento del objeto, de esta manera:

$$I = Ft = \Delta p$$

En síntesis para que cambie el estado de movimiento se requiere un proceso de interacción el cual se asocia con un mecanismo de interacción que es la fuerza y su intensidad que es la aceleración, parámetros que se relacionan a través de la masa del objeto que sufre la interacción,  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ , que nos indica que la interacción se manifiesta en una dirección determinada en la cual su mecanismo e intensidad tienen esta dirección, es decir su fuerza y su aceleración. En el proceso de interacción el objeto reacciona interaccionando a su vez con el agente causante de la interacción de tal manera que compensará la energía del sistema, si el mecanismo es fuerte la reacción es fuerte. En este proceso de interacción se realiza un trabajo que es igual al cambio en la energía cinética del objeto, se manifiesta un impulso que es proporcional al cambio en la cantidad de movimiento, y el gasto de energía se relaciona con la potencia que nos dice que tan rápido se manifiesta el cambio en energía cinética, es decir, que tan rápido se realizó el trabajo.

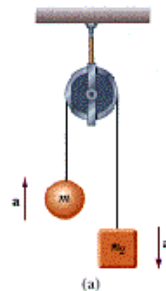
En el caso de tener dos o más objetos en movimiento se debe proceder construyendo los modelos para cada uno de los objetos considerando que los elementos que unen los objetos, por ejemplo, una cuerda, ésta debe tener la misma acción sobre cada objeto. Como el caso del primer problema de la siguiente serie:

## Problemas

Una masa  $M$  sobre una mesa horizontal se fija con una cuerda a una masa de  $0,35 \text{ Kg}$  que cuelga sobre el lado de la mesa a  $1,20 \text{ m}$  del piso. El sistema se suelta desde el reposo, y la masa de  $0,35 \text{ Kg}$  golpea el suelo  $0,80 \text{ s}$  después. El sistema se dispone en su posición inicial, y se coloca una masa de  $1,0 \text{ Kg}$  sobre la masa  $M$ . El sistema con la masa adicional de  $1,0 \text{ Kg}$  sobre el bloque de masa  $M$  se suelta de nuevo partiendo del reposo y esta vez la masa de  $0,35 \text{ Kg}$  golpea el suelo  $1,24$  segundos después. Determine el valor de la masa  $M$  y el coeficiente de fricción cinética entre  $M$  y la mesa.

El carro de Ernesto está parado en una calle con inclinación de  $20^\circ$  con la batería baja. Una grúa engancha una cuerda al carro a fin de jalarlo. El carro tiene una masa de  $1500 \text{ Kg}$  y un coeficiente de fricción rodante de  $0.05$ . La cuerda soporta una tensión máxima de  $8000 \text{ N}$ . Después de que es atada la cuerda, la grúa comienza a acelerar a  $2 \text{ m/s}^2$ . ¿Se romperá la cuerda?

Dos masas de  $3.50 \text{ kg}$  y  $5.50 \text{ kg}$  están conectadas por una cuerda ligera que pasa a través de una polea sin fricción, como se muestra en la figura.



Determine (a) la tensión en la cuerda, (b) la aceleración de cada masa, y (c) la distancia que avanza cada masa en el primer segundo de movimiento si parten del reposo.

Un elevador puede llevar una carga de  $200 \text{ Kg}$  a  $10 \text{ m}$  de altura en un edificio. Si la potencia es de  $200 \text{ W}$ , ¿cuánto tiempo necesitará para llevar el objeto hasta esa altura?

¿Cuál es el impulso necesario para detener una bola de boliche de  $10 \text{ Kg}$  que se mueve con una velocidad de  $6 \text{ m/s}$ ?

¿Cuál es la fuerza total sobre un objeto que cae libremente, despreciando la resistencia del aire, si tiene un peso de  $10 \text{ Newton}$ ? Si la resistencia del aire es de  $4 \text{ Newton}$ , ¿cuál es la fuerza total, o fuerza neta, que actúa sobre él?

Un automóvil con 1000 Kg se mueve a 20 Km/h, ¿cuál es la fuerza que deben ejercer los frenos si debe detenerse en 10 s?

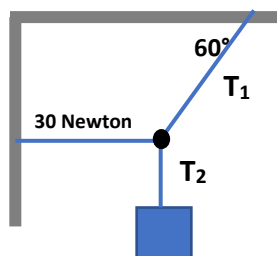
Un hombre de 80 Kg se para en una báscula dentro de un elevador. La lectura de la báscula es de 915 Newton. Determine la aceleración del elevador.

Un contrapeso de plomo de 200 g cuelga del techo de un automóvil sostenido por un hilo delgado. El automóvil sube una cuesta de  $12^\circ$  y acelera a  $2,25 \text{ m/s}^2$ . Calcular la tensión del hilo.

Un hombre sube un refrigerador hasta su recibidor recostándolo y empujándolo sobre un a rampa de madera. La masa del refrigerador es de 115 Kg, el ángulo que la tabla hace con la horizontal es de  $23^\circ$ , y los coeficientes de fricción estática y cinética entre el refrigerador y la rampa son 0,40 y 0,30, respectivamente, ¿cuál es la fuerza, paralela a la rampa, que se debe aplicar al refrigerador para comenzar a moverlo hacia arriba de la rampa? Si se aplica la misma fuerza después de que el refrigerador comienza a moverse, ¿cuál es la aceleración? Si se debe de mover hacia arriba de la rampa a velocidad constante, ¿con qué hay que empujar para mantenerlo en movimiento, una vez que ya comenzó a moverse? Si después de subir parte de la rampa se quiere tomar un descanso, ¿se puede dejar con seguridad el refrigerador sobre la tabla? Si no es así, ¿qué fuerza hay que seguir haciendo para impedir que se resbale por la tabla?

A un bloque de 3,20 Kg se le da una velocidad inicial de 12,0 m/s hacia arriba de un plano que hace un ángulo de  $30^\circ$  con la horizontal. Después que ha viajado 6,0 m a lo largo del plano, su velocidad hacia arriba es de 2,40 m/s. Indique a) el coeficiente de fricción entre el plano y el bloque; b) la distancia máxima que alcanza el bloque desde su punto de partida y c) la velocidad del bloque cuando ha regresado a su punto de partida.

Determinar las tensiones y masa del objeto, del siguiente sistema en equilibrio. (para construir el diagrama, considere el nudo como un objeto sin masa)



Un coche de 750 Kg toma una curva de radio 160 m a 90 Km/h ¿Cuál debería ser el ángulo de peralte de la curva para que la única fuerza entre el pavimento y las llantas fuese la fuerza normal?

Una masa de 6 Kg en reposo se eleva a una altura de 3m por una fuerza vertical de 80 Newton. Determinar: el trabajo realizado por la fuerza. El trabajo realizado por el campo gravitacional. La energía cinética final de la masa.

Un fabricante de automóviles anuncia que su coche con una masa de 800Kg puede acelerar desde el reposo a 100 Km/s en 8 s. Determine la potencia del coche suponiendo que la potencia es constante. Cuál será la velocidad del vehículo después de 4 s (despreciar rozamiento y resistencia del aire).

Mostrar cómo un motociclista puede recorrer un círculo sobre una pared vertical. Considerar parámetros razonables (coeficiente de fricción, radio del círculo, masa de la motocicleta, etc.). Calcular la velocidad mínima necesaria.

Un bloque de masa  $m_1 = 4$  Kg se encuentra sobre un plano que forma un ángulo de  $30^\circ$  con la horizontal, el coeficiente de fricción cinético entre el bloque y el plano es de 0,24. Este bloque está unido a un segundo bloque de masa  $m_2 = 5$  Kg que cuelga libremente de una cuerda que pasa por una polea al final del plano sin rozamiento y con masa despreciable. Determinar la aceleración de las masas y la tensión de la cuerda.