

No escribas tu nombre, solo tu número de ficha: _____

- 1.- ¿A que equivale la siguiente expresión para un número arbitrario de raíces?

$$\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}}}$$

- 2.- Sea el círculo C_1 intersectado por una recta secante AB y una recta tangente BC. Considerando que el arco AB mide 200° , ¿cuánto mide el ángulo ABC?



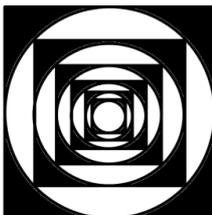
- 3.- Demostrar que si $|r| < 1$:

$$\sum_{i=0}^{\infty} r^i = \frac{1}{1-r}$$

Partiendo del resultado general que dice que:

$$\sum_{i=0}^n r^i = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$$

- 4.- Pedro compra un tapete cuadrado con un patrón de cuadrados y círculos inscritos alternantes que se repite indefinidamente como el que se muestra en la figura. Pedro quiere saber cuál es la proporción del área sombreada respecto al área total del tapete, pero es tan flojo que solo mide que medio lado de su tapete cuadrado mide $1/\pi^{1/2}$. Calcular dicha proporción.



- 5.- Un tanque de agua en forma de cono invertido tiene un diámetro superior de 6m y altura de 4m. Si el tanque se llena a razón de $10 \text{ m}^3/\text{min}$ y un papel flota sobre la superficie del agua, desplazándose conforme el nivel aumenta, calcular la velocidad del papel cuando el nivel alcanza 2m.

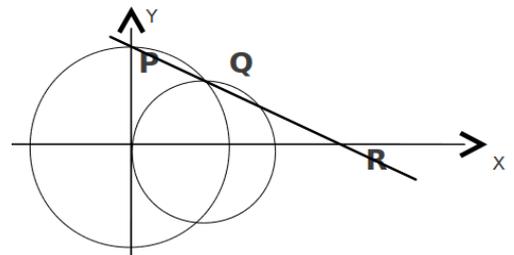
- 6.- Sea $f(x)$ una función **par** definida en el intervalo simétrico $[-a, a]$ y sea $g(x)$ una función **impar** definida también en el intervalo simétrico $[-a, a]$. Si ambas funciones son integrables en dicho intervalo, ¿cuánto vale la siguiente integral para un n entero impar?

$$\int_{-a}^a f(x)[g(x)]^n dx$$

- 7.- Sean dos circunferencias C_1 y C_2 definidas como:

$$\begin{cases} C_1: & x^2 + y^2 = r^2 \\ C_2: & (x-1)^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Que se intersectan en el punto Q. Sean además definidos los dos puntos $P = (0, r)$ y $R = (d, 0)$ de modo que definan a su vez al segmento PQR, como se muestra a continuación. Investigar qué pasa con el punto R a medida que $r \rightarrow 0^+$.



- 8.- Despejar α de la siguiente ecuación:
 $\text{sen} \alpha + \text{cos} \alpha = 2/3$

- 9.- ¿Cuál es el valor máximo del entero n tal que el número 2^n tenga exactamente 605 dígitos?

10.- Demostrar que:

$$1 - \frac{(\sin(x))^2 \cos(x)}{\tan(x) + 1} - \frac{(\cos(x))^2}{\tan(x) + 1} = \sin(x)\cos(x)$$

11.- Dados **a** y **b**, dos enteros positivos mayores a 1 y diferentes entre sí, resolver:

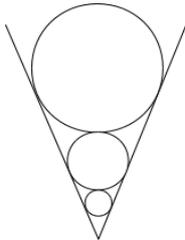
$$a^b = b^a$$

12.- Mostrar que no existen cuatro enteros $\{s, t, u, v\}$ distintos todos de 0 tales que se cumpla la siguiente igualdad:

$$s^2 + t^2 + u^2 - 7v^2 = 0$$

13.- ¿Cuál es el último dígito de 51! ?

14.- Se acomodan tres círculos dentro de un cono, los dos más grandes con radios 20 y 12 respectivamente. El tercero queda en el fondo. Si todos los círculos están apretados exactamente, ¿Cuál es el radio del tercero?



15.- Se puede ver fácilmente que $3 \times 4 \times 5 \times 6 = 360 = 19^2 - 1$. Mostrar que en general el producto de cuatro enteros consecutivos es siempre uno menos que un cuadrado perfecto.

16.- Probar que para cualquier número que no es múltiplo de 7, su cubo va a estar siempre a una unidad de distancia del siguiente múltiplo de 7.

17.- Probar que $10^n - 1$ es siempre divisible por 11 cuando n es par y que $10^n + 1$ es divisible por 11 para n impar.

18.- Demostrar que:

$$(\tan(18^\circ))^2 (\tan(54^\circ))^2$$

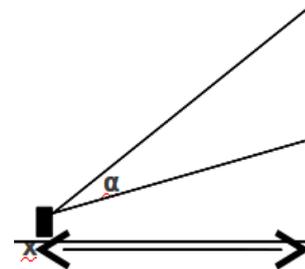
Es un número racional, si se sabe lo siguiente:

$$\cos(36^\circ) = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4}$$

19.- Se tiene un trapecio como el de la figura. Si los lados sólidos (extremos e inferior) son de longitud 1, ¿Cuánto debe medir el lado punteado (superior) para que el área del trapecio sea lo más posible?



20.- Roberto va al cine con su novia y quiere los mejores lugares posibles. Roberto sabe las suficientes matemáticas para intuir que los mejores lugares son aquellos donde el ángulo que abarca su visión es el mayor. Si la pantalla mide 1 de alto y se localiza a 1 del nivel del suelo, ¿a que distancia de la pantalla debe escoger sus asientos Roberto?



21.- Si $2^x = 3$, probar que x es irracional.

22.- Suponer que x^* es un valor aproximado de x , y^* es un valor aproximado de y . Si se usa $2x^* + y^*$ como valor aproximado de $2x + y$, encontrar el error de esta aproximación. ¿Cuántas cifras decimales de π y $\sqrt{2}$ se requieren para calcular $2\pi + \sqrt{2}$ con una precisión de 10 cifras decimales?