Algebra Matricial - Tarea 2

1.- Demuestre las siguientes propiedades de la traza:

a) $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$

b) $\mathrm{tr}(A+B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$

c) $\mathrm{tr}(cA) = c\,\mathrm{tr}(A)$

2.- Demuestre que si A es invertible, entonces su inversa es única.

3.- Demuestre que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

4.- Demuestre que $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$. Sugerencia: considere el determinante de la identidad.

Ejercicios con Octave/Matlab:

5.- Genere tres matrices aleatorias A_1, A_2, A_3 de 5×5 con elementos entre 0 y 10 (usar la función `rand(m,n)` y multiplicar por una constante). Calcule el determinante de cada una de ellas para saber cuáles son invertibles. Para aquellas que lo sean, encuentre la inversa y verifique que $AA^{-1} = I$.

6.- Genere otra matriz aleatoria B de $n \times n$ con elementos entre -1 y 1. Seleccione un renglón j (i.e. `B(j,:)`) y asígnele una combinación lineal de uno o mas renglones de B (excepto el renglón j), por ejemplo, `B(3,:) = 2*B(1,:) - B(4,:)`. Es la nueva B invertible? Justifique su respuesta y verifíquelo con Octave.

7.- Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones usando Octave y verifique los resultados “a mano”:

a)
$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 4 \\ -3x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 4 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & + & 4x_4 & = & 7 \\ -3x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & - & 2x_4 & = & 1 \\ 5x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & -1 \end{array}$$

8.- Genere una matriz de 6×6 de rango 4. Verifíquelo usando la función `rank()`.

9.- Calcule el rango de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$, y de las siguientes dos matrices con este patrón. Explique el comportamiento de estas matrices.