# Algebra Matricial - Tarea 5

1.- Para los siguientes conjuntos de vectores, determine cuáles son linealmente independientes. Sugerencia: trate los vectores como columnas de una matriz.

a. $(1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 0)$

b. $(-3, 4, 2), (7, -1, 3), (1, 1, 8)$

c. $(1, -2, 1, 1), (3, 0, 2, -2), (0, 4, -1, 1), (5, 0, 3, -1)$

d. $(1, -1, 2), (4, 0, 0), (-2, 3, 5), (7, 1, 2)$

e. $x^3 - 1,\ 1 + x - 4x^3,\ 2x,\ x^3 + 18x - 9\ \in P_3$

2.- Bajo qué condiciónes para $a, b, c$ y $d$ los vectores $(a, b)^t$ y $(c, d)^t$ son linealmente dependientes?

3.- Sea $C^1[0, 1]$ el conjunto de todas las funciones reales contínuas y derivables en el intervalo [0,1]. Verifique que $C^1[0, 1]$ es un espacio vectorial (es decir, que cumple con los diez axiomas).

4.- Sean $f(x), g(x) \in C^1[0, 1]$. El **wronskiano** $W(f, g)(x)$ de $f$ y $g$ se define como:

$$W(f, g) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix}.$$

Demuestre que si $f$ y $g$ son linealmente dependientes, entonces $W(f, g)(x) = 0$ para todo $x \in [0, 1]$.

5.- En Octave se pueden utilizar las funciones `atan(x)` y `atan2(y,x)` para encontrar la dirección de un vector en $\mathbb{R}^2$. Explique y dé ejemplos de porqué es preferible usar `atan2` en lugar de `atan`.

6.- Realice los siguientes ejercicios en Octave:

a) Genere cuatro vectores $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ y $\vec{a}_4$ en $\mathbb{R}^4$ aleatorios usando `rand()` y verifique que sean linealmente independientes.

b) Haga lo mismo para los vectores $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ y $\vec{b}_4$.

c) Genere ahora cuatro vectores $\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3$ y $\vec{c}_4$ que sean linealmente dependientes.

d) Sean

$$A = (\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3\ \vec{a}_4)\,,\ B = \left(\vec{b}_1\ \vec{b}_2\ \vec{b}_3\ \vec{b}_4\right),\ C = (\vec{c}_1\ \vec{c}_2\ \vec{c}_3\ \vec{c}_4)\,.$$

Calcule $\rho(AB)$, $\rho(AC)$, y $\rho(BC)$.

e) Repita el ejercicio varias veces (para distintas $A$, $B$ y $C$). Qué conclusión se puede acerca de la dependencia lineal de las columnas del producto de matrices cuadradas?

7.- Para los siguientes conjuntos de vectores, determine si los vectores forman una base del espacio lineal al que pertenecen.

a. $1 - x^2,\ x\ \in P_2$

b. $1,\ 1+x,\ 1+x^2,\ 1+x^3\ \in P_3$

c. $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \in M_{22}$, donde $abcd \neq 0$.

8.- Encuentre una base en $\mathbb{R}^3$ para el conjunto de vectores en el plano $2x-y-z=0$. Cuál es la dimensión de este espacio?

9.- Encuentre una base para $D_3$, el espacio vectorial de matrices diagonales de $3 \times 3$. Cuál es la dimensión de este espacio?

10.- El conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones homogéneo (es decir, cuyos términos independientes son todos cero) es un espacio vectorial. Para cada uno de los sistemas mostrados a continuación, encuentre una base e indique la dimensión del espacio de soluciones del sistema.

a)

$$\begin{aligned} x - y &= 0 \\ -3x + 3y &= 0 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} x - 3y + z &= 0 \\ -2x + 2y - 3z &= 0 \\ 4x - 8y + 5z &= 0 \end{aligned}$$

11.- Cuál es la relación entre la dimensión del espacio de soluciones, el rango de la matriz de coeficientes, y el número de variables en un sistema de ecuaciones homogéneo?