Algebra Matricial - Tarea 7

1. Para cada inciso, encuentre $\vec{u} \cdot \vec{v}$ y el coseno del ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$.
   (a) $\vec{u} = (2,3)$, $\vec{v} = (5,-7)$
   (b) $\vec{u} = (-6,-2)$, $\vec{v} = (4,0)$
   (c) $\vec{u} = (1,-5,4)$, $\vec{v} = (3,3,3)$
   (d) $\vec{u} = (-2,2,3)$, $\vec{v} = (1,7,-4)$

2. Para cada inciso, encuentre la proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{a}$, así como la componente de $\vec{u}$ ortogonal a $\vec{a}$.
   (a) $\vec{u} = (6,2)$, $\vec{a} = (3,-9)$
   (b) $\vec{u} = (-1,-2)$, $\vec{a} = (-2,3)$
   (c) $\vec{u} = (3,1,-7)$, $\vec{a} = (1,0,5)$
   (d) $\vec{u} = (1,0,0)$, $\vec{a} = (4,3,8)$

3. Demuestre que para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$, los vectores $\vec{u} = (a,b)$ y $\vec{v} = (-b,a)$ son ortogonales. Utilice este resultado para encontrar dos vectores unitarios que sean ortogonales a $\vec{w} = (2,-3)$.

4. Encuentre los cosenos de los ángulos internos del triángulo cuyos vértices son $(0,-1)$, $(1,-2)$ y $(4,1)$.

5. Demostrar que $\vec{a} = (3,0,2)$, $\vec{b} = (4,3,0)$ y $\vec{c} = (8,1,-1)$ son los vértices de un triángulo rectángulo. En qué vértice está el ángulo recto?

6. Sean $\vec{p} = (2,k)$ y $\vec{q} = (3,5)$. Para cada inciso, encuente el valor de k para el que se cumple la condición descrita.
   (a) $\vec{p}$ y $\vec{q}$ son paralelos
   (b) $\vec{p}$ y $\vec{q}$ son ortogonales
   (c) El ángulo entre $\vec{p}$ y $\vec{q}$ es $\pi/4$.

7. Demostrar que si $\vec{v}$ es ortogonal tanto a $\vec{w_1}$ como a $\vec{w_2}$, entonces $\vec{v}$ es ortogonal a cualquier combinación lineal de $\vec{w_1}$ y $\vec{w_2}$. Cómo se interpreta geométricamente este resultado cuando $\vec{v}, \vec{w_1}, \vec{w_2} \in \mathbb{R}^3$?

8. Encuentre una base para la imagen y el espacio nulo de cada una de las matrices dadas:

a. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & -1 & 8 \end{pmatrix}$ d. $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

9. La función `null(A)` en Octave devuelve una base ortonormal del espacio nulo de la matriz `A`. Utilizando esta función, realice los siguientes ejercicios:

   a. Genere en Octave tres matrices aleatorias de 5×5 con rangos 2, 3 y 4, respectivamente.

   b. Encuentre una base para la imagen y el espacio nulo de cada una de las matrices generadas.

   c. Verifique que $\dim(\text{imag}\ \ A) + \dim(N_A) = 5$ para cada una de las matrices.

   d. Verifique, para cada matriz generada `A`, que la matriz que se obtiene con

   ```
   [orth(A), null(A)]
   ```

   es una base ortonormal de $\mathbb{R}^5$.

10. Una matriz A de $n \times n$ se llama **nilpotente** si $A^k = 0$ para algún entero $k \geq 1$. Demuestre que si A es nilpotente, entonces $\det A = 0$.

11. La matriz A se llama **idempotente** si $A^2 = A$. Si A es idempotente, qué valores puede tomar $\det A$?

12. Para los siguientes sistemas de ecuaciones, determine si el sistema tiene solución única, infinitas soluciones, o no tiene solución. En caso de tener solución única, encuéntrela. En caso de haber infinitas soluciones, encuentre la solución general del sistema dada como $y = x + h$ donde x es una solución fija del sistema no homogéneo y h representa una solución del sistema homogéneo (expresar h como una combinación lineal de los vectores de una base del espacio nulo).

   a.
   $$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 7 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 &= 4 \\ 6x_1 + x_2 + 3x_3 &= 20 \end{aligned}$$

   b.
   $$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 7 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 &= 4 \\ 6x_1 + x_2 + 3x_3 &= 18 \end{aligned}$$

   c.
   $$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 5 \\ 6x_1 - 5x_2 + 7x_3 &= 17 \end{aligned}$$

   d.
   $$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= 2 \\ 3x_1 + 2x_3 - 2x_4 &= 5 \\ 4x_2 - x_3 - x_4 &= -1 \\ 5x_1 + 3x_3 - x_4 &= 8 \end{aligned}$$