Algebra Matricial - Tarea 8

1.- Encuentre, usando lápiz y papel, los eigenvalores, su multiplicidad algebráica y sus correspondientes espacios propios de cada una para las matrices dadas:

a. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

2.- Demuestre que si A es una matriz diagonal, entonces los valores propios de A son los elementos de la diagonal de A.

3.- En Octave, la función `poly(A)` devuelve un vector con los coeficientes del polinomio característico de la matriz `A`. Por ejemplo, el polinomio característico de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ es $p(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda - 2$, por lo tanto en Octave tenemos lo siguiente:

```
> poly([1,2;3,4])
ans =
   1.0000  -5.0000  -2.0000
```

Por otra parte, la función `roots(v)` devuelve las raíces del polinomio cuyos coeficientes están descritos por el vector `v`. Por ejemplo, las raíces de $x^2 + x - 12 = (x-3)(x+4)$ son claramente $x = 3$ y $x - 4$, por lo tanto en Octave:

```
> roots([1, 1, -12])
ans =
  -4
   3
```

a. Utilice lo anterior para verificar sus respuestas en el Problema #1 de la tarea.

b. Encuentre los eigenvalores y sus multiplicidades algebráicas de las siguientes matrices:

i. $\begin{pmatrix} -8 & -2 & 6 & 0 & 3 \\ 6 & -7 & 4 & 5 & 7 \\ 5 & 0 & 5 & 7 & -3 \\ 9 & 1 & 0 & 3 & 8 \\ 0 & 8 & 0 & -3 & -3 \end{pmatrix}$ ii. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

c. Encuentre los espacios propios de cada una de las matrices del inciso anterior. Sugerencia: para cada eigenvalor λ, encuentre una base del espacio nulo de $A - \lambda I$, utilizando la función `null()`.

4.- La función `eig()` devuelve directamente los eigenvalores y eigenvectores de una matriz A, y se utiliza de la siguiente manera: `[V, L] = eig(A)`, donde `V` es una matriz donde se almacenan los eigenvectores y `L` es una matriz diagonal que contiene los eigenvalores como elementos de la diagonal. Cada columna de `V` representa un eigenvector correspondiente al eigenvalor en la misma columna de `L`.

a. Genere una matriz A invertible de 4×4 con elementos aleatorios entre -9 y 9.

b. Use la función `eig()` para obtener los eigenvalores y eigenvectores de A.

c. Es de esperarse que la matriz L que devuelve `eig()` sea semejante a A. Para verificarlo, calcule $V^{-1}AV$ (donde V es la matriz de eigenvectores devuelta por `eig()`). Significa esto que A es diagonalizable?

d. Genere ahora otra matriz invertible C de 4×4 con elementos aleatorios entre -9 y 9. Sea $B = C^{-1}AC$. Verifique que B es semejante a A.

e. Ya que $B = C^{-1}AC$, entonces $A = CBC^{-1}$. Por otra parte, vimos que $L = V^{-1}AV$. Utilice esto para demostrar que B es semejante a L.

5.- Demuestre que, si A es diagonalizable, entonces $\det A = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n$, donde $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ son los eigenvalores de A.