Teoría del Autómata - Tarea 1 - Entregar 5 de Febrero

1.- Considere los conjuntos $A = \{x, y, z\}$ y $B = \{0, 1\}$ y describa de forma explícita los siguientes conjuntos:

a. $B \times A \times B$

b. $\mathcal{P}\{A\} - \emptyset$

c. $\mathcal{P}\{A\} - \{\emptyset\}$

d. $\mathcal{P}\{B \times B\}$

e. B^*

2.- Considere los siguientes conjuntos:

- $X = \{x \ : \ x \in \mathbb{N} \text{ y } x \text{ es impar}\}$,
- $Y = \{y \ : \ y \in \mathbb{N} \text{ y } y \text{ es primo}\}$,
- $Z = \{z \ : \ z \in \mathbb{N} \text{ y } z \text{ es múltiplo de tres}\}$.

Describa los siguientes conjuntos:

$$\text{(i)}X - (Y \cap Z), \qquad \text{(ii)}(Y \cap Z) - X, \qquad \text{(iii)}X \cup (Y \cap Z).$$

3.- Escriba en notación explícita el conjunto

$$\{x, y\} \times \{a, b, c\} \times \{\lambda, \sigma\}.$$

4.- Tomando los mismos conjuntos del ejercicio anterior, calcule $|\mathcal{P}\left\{\mathcal{P}\{A \times B\}\right\}|$.

5.- Se define la operación $A + B$ mediante la fórmula

$$A + B = (A \cap B') \cup (A' \cap B).$$

Usando la definición anterior, y las propiedades de las operaciones de los conjuntos, mostrar que:

$$A + B = (A \cup B) \cap (A \cap B)'.$$

6.- Se define la función $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ como $f(x) = 2x$ para todo $x \in \mathbb{Z}$ (donde $\mathbb{Z}$ representa el conjunto de todos los números enteros).

a. Indique si f es uno-a-uno. En caso de que no lo sea, muestre un contraejemplo.

b. Indique si f es sobre. En caso de que no lo sea, muestre un contraejemplo.

7.- Algunas veces es útil escribir un conjunto infinito en forma de lista

$$a_1, a_2, a_3, \ldots.$$

Sin embargo, no siempre es posible hacer esto: por ejemplo, no hay forma de listar el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales. Un ejemplo donde es posible hacerlo es para el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros, el cual puede enlistarse como

$$0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots.$$

(i) Escriba el conjunto $\{q \in \mathbb{Q} \ : \ 0 < q \leq 1\}$ como una lista, donde $\mathbb{Q}$ es el conjunto de números racionales:

$$\mathbb{Q} = \{a/b \ : \ a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}.$$

Sugerencia: para $n = 1, 2, 3, \ldots$ escriba las fracciones con denominador n.

(ii) Escriba en forma de lista el conjunto $\mathcal{F}$ de todos los subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$ (el conjunto de números naturales). Sugerencia: para $n = 1, 2, 3, \ldots$ escriba los subconjuntos $\{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$ para los cuales $a_1 + a_2 + \ldots + a_r = n$.