

Procesamiento Digital de Señales



Dr. Alfonso Alba Cadena
fac@galia.fc.uaslp.mx

Facultad de Ciencias
UASLP

Introducción a las notas del curso

- Estas notas están diseñadas para ser una guía en un curso de Procesamiento Digital de Señales a nivel maestría. Pueden utilizarse también a nivel licenciatura, omitiendo los temas más difíciles, y ajustando el nivel de los ejercicios.
- Se sugiere utilizar tanto lenguaje C/C++ como un lenguaje orientado al cómputo matemático (Matlab, Octave, etc) para el desarrollo de los ejercicios y proyectos.

Objetivos Generales

- Introducir los conceptos básicos de señales y sistemas en tiempo discreto, incluyendo el teorema de muestreo, transformada de Fourier, y transformada Z.
- Tener un panorama amplio de las aplicaciones del procesamiento digital de señales.
- Establecer las nociones y criterios básicos para el diseño de filtros digitales.
- Realizar un proyecto final en donde se implemente una aplicación específica.

Contenido

1. Señales y sistemas en tiempo discreto
2. Representación en el dominio de la frecuencia
3. Transformada discreta de Fourier
4. Muestreo y reconstrucción de señales en tiempo continuo
5. Transformada Z
6. Diseño de filtros digitales

Bibliografía sugerida

- **Tratamiento de señales en tiempo discreto.**
Oppenheim y Schafer.
Segunda Edición, Prentice Hall, 2000.
- **Tratamiento digital de señales: Principios, algoritmos y aplicaciones.**
Proakis y Manolakis.
Tercera Edición, Prentice Hall, 1998.

Unidad I

Señales y sistemas

Señales

- Una *señal* representa una cantidad o una medición que cambia con respecto a alguna variable independiente, la cual comúnmente representa el tiempo; sin embargo, la variable independiente puede también representar otras cantidades como la frecuencia, o una posición espacial.
- Matemáticamente, una señal puede representarse como una función, por ejemplo: $x(t)$, $I(x, y)$, $Y(\omega)$, etc.
- Las señales pueden dividirse en varias clases, dependiendo de si la variable independiente es continua (señales analógicas) o discreta (señales en tiempo discreto), o dependiendo de si existe más de una variable independiente.

Señales multicanal y multidimensionales

- Una señal *multicanal* puede adquirirse mediante múltiples sensores, y puede representarse como una señal vectorial. Por ejemplo, si $x_1(t)$, $x_2(t)$, y $x_3(t)$ son señales obtenidas a partir de 3 sensores, entonces se puede formar la señal multicanal $X(t)$ dada por

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}.$$

- **Ejemplos de señales multicanal:** audio estéreo o surround, electroencefalogramas, imágenes a color, imágenes satelitales.
- Una señal multidimensional es aquella que depende de más de una variable independiente.
- **Ejemplos de señales multidimensionales:** imagen $I(x, y)$, video $I(x, y, t)$.

Señales aleatorias

- En muchas situaciones, no es posible definir los valores que toma una señal de manera determinista, y es necesario introducir cierta incertidumbre.
- En estos casos, se define el valor que toma una señal $x(t)$ como una variable aleatoria proveniente de alguna distribución P :

$$x(t) \sim P,$$

donde P puede ser constante (señal estática), o bien, puede variar con respecto al tiempo, o cualquier otra variable.

- Para estudiar estas *señales aleatorias*, se utilizan técnicas y modelos estadísticos tales como: histogramas, correlación y autocorrelación, coherencia, etc.

Señales en tiempo discreto

- Las señales en tiempo discreto están definidas únicamente para valores de la variable independiente en un conjunto numerable, y se representan como secuencias de números. Por ejemplo, $x[n]$, $n \in \mathbb{Z}$.
- En muchos casos, las señales en tiempo discreto provienen de muestrear señales continuas, por ejemplo,

$$x_d[n] = x_a(nT), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

donde T es el *intervalo de muestreo* y $1/T$ es la *frecuencia de muestreo*.

Aliasing

- Considere las dos señales analógicas siguientes:

$$x_1(t) = \cos 2\pi(20)t$$

$$x_2(t) = \cos 2\pi(50)t$$

- Si muestreamos estas señales con una frecuencia de muestreo de 30 Hz, entonces obtenemos las siguientes señales en tiempo discreto:

$$x_1[n] = \cos 2\pi \left(\frac{20}{30} \right) n$$

$$x_2[n] = \cos 2\pi \left(\frac{50}{30} \right) n = \cos \left[2\pi \left(\frac{20}{30} \right) n + 2\pi n \right] = x_1[n]$$

- Este fenómeno, en el cual durante un proceso de muestreo una frecuencia alta se hace pasar por otra frecuencia (más baja), se conoce como *aliasing*, y evita que la señal original se pueda reconstruir a partir de las muestras.

Teorema del muestreo de Nyquist

- Supongamos que una señal analógica $x(t)$ se puede representar como una suma de senoidales con diferente frecuencia, amplitud y fase:

$$x(t) = \sum_{i=1}^N a_i \cos(2\pi f_i t + \phi_i).$$

- El *ancho de banda* F_x de la señal es la frecuencia máxima presente en la misma; es decir,

$$F_x = \max \{f_i\}.$$

- Entonces, para evitar el aliasing, es necesario que la frecuencia de muestreo f_s sea mayor o igual que $2F_x$.
- La frecuencia $f_s/2$ se conoce como *frecuencia de Nyquist* e indica la frecuencia máxima que puede representarse en una señal discreta con una frecuencia de muestreo f_s .

Señales discretas básicas

- **Impulso discreto (delta de Kronecker):** $\delta[n] = \begin{cases} 0, & n \neq 0, \\ 1, & n = 0. \end{cases}$

Notar que cualquier señal puede representarse como una suma de impulsos:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n - k].$$

- **Escalón unitario:** $u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0. \end{cases}$

Señales discretas básicas

- **Secuencia exponencial:** $x[n] = A\alpha^n$.
- **Secuencia senoidal:** $x[n] = A \cos(\omega n + \phi)$.
- **Secuencia exponencial compleja:**

$$x[n] = Ae^{j\omega n} = A \cos(\omega n) + jA \sin(\omega n).$$

A menos que se indique lo contrario, la frecuencia ω está dada en radianes por muestra. Entonces, la frecuencia en rad/s está dada por ωT , donde T es el intervalo de muestreo.

Sistemas discretos

- Un *sistema discreto* es un operador o una transformación T que al aplicarse a una señal $x[n]$ da como resultado otra señal $y[n]$:

$$y[n] = T \{x[n]\} .$$

- **Ejemplo:** Uno de los sistemas más comunes es el *retardo*, el cual está dado por

$$y[n] = x[n - n_d] .$$

Si $n_d > 0$, entonces y es una versión retardada de x , mientras que si $n_d < 0$, y es una versión adelantada de x .

Promedio móvil

- Otro ejemplo de sistema discreto es el *promedio móvil simétrico*, dado por

$$y[n] = \frac{1}{2N + 1} \sum_{k=-N}^N x[n - k].$$

En este caso, la muestra $y[n]$ se calcula como el promedio de las muestras desde $x[n - N]$ hasta $x[n + N]$.

- Una de las aplicaciones del promedio móvil consiste en reducir los cambios bruscos en la señal $x[n]$.

Clasificación de los sistemas discretos

- **Sistemas sin memoria:** Son aquellos para los cuales la salida al tiempo n depende solamente de la entrada $x[n]$.
- **Sistemas lineales:** Un sistema T es lineal si para cualesquiera dos señales x_1 y x_2 y escalares a_1 y a_2 , cumple que

$$T\{a_1x_1 + a_2x_2\} = a_1T\{x_1\} + a_2T\{x_2\}.$$

En general, si T es lineal, entonces

$$T\{a_kx_k\} = a_kT\{x_k\}.$$

Notar que el retardo y el promedio móvil son ambos lineales.

Clasificación de los sistemas discretos

- **Sistemas invariantes en el tiempo:** Un sistema $y[n] = T\{x[n]\}$ es invariante en el tiempo si un retardo en la señal de entrada produce el mismo retardo en la señal de salida; es decir, si $y[n - n_d] = T\{x[n - n_d]\}$, para todo n_d .

Ejemplo: El sistema compresor, dado por $y[n] = x[Mn]$, no es invariante en el tiempo.

- **Estabilidad:** Un sistema es estable si y solo si una señal de entrada acotada produce una salida acotada. En otras palabras, el sistema T es estable si para cualquier señal $x[n]$ tal que $|x[n]| < M_x$ para algún número positivo M_x existe otro número $M_y > 0$ tal que $|T\{x[n]\}| < M_y$.

Clasificación de los sistemas discretos

- **Sistemas causales:** Un sistema es causal si la salida al tiempo n_0 depende solamente de los valores de entrada en tiempos $n \leq n_0$.

Si la salida al tiempo n_0 depende solamente de la entrada en tiempos $n > n_0$, entonces el sistema es *anticausal*.

Ejemplos: El sistema

$$y[n] = x[n] - x[n - 1],$$

conocido como *diferencias progresivas hacia atrás* es causal. Las *diferencias progresivas hacia adelante*, dadas por

$$y[n] = x[n + 1] - x[n],$$

no son causales.

Sistemas lineales e invariantes en el tiempo

- Los sistemas más comunes son aquellos que son lineales e invariantes en el tiempo (LIT).
- Estas propiedades permiten caracterizar la manera en que el sistema actúa sobre una señal dada.
- Existen varias técnicas para analizar e implementar los sistemas LIT, entre las que se incluyen:
 - Convolución
 - Transformada de Fourier
 - Ecuaciones de diferencias
 - Transformada Z

Convolución

- Podemos representar cualquier señal $x[n]$ como una suma de impulsos:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k].$$

- Si T es un sistema LIT, entonces, por linealidad, su salida está dada por

$$\begin{aligned} T\{x[n]\} &= T\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]\right\} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]T\{\delta[n-k]\}. \end{aligned}$$

- Si definimos $h[n] = T\{\delta[n]\}$, entonces, por ser T invariante en el tiempo, tenemos que

$$T\{x[n]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k].$$

Convolución

- Tenemos entonces que la salida y de un sistema LIT T está dada por

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k],$$

donde $h[n] = T\{\delta[n]\}$.

- La operación anterior se conoce como *convolución*, y se denota con el símbolo $*$, de manera que $y = x * h$, donde

$$(x * h)[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k].$$

- $h[n]$ se conoce como la *respuesta al impulso*, *núcleo*, o *kernel* de T , y caracteriza completamente a la transformación.

Propiedades de la convolución

- Conmutatividad: $x * y = y * x$
- Asociatividad: $x * (y * z) = (x * y) * z$
- Distributividad: $x * (y + z) = x * y + x * z$
- Ejercicio: Demostrar las tres propiedades anteriores.

Kernels de transformaciones básicas

- Retardo: $h[n] = \delta[n - n_d]$
- Promedio móvil: $h[n] = \begin{cases} \frac{1}{2N+1}, & \text{para } -N \leq n \leq N, \\ 0, & \text{para otros valores de } n. \end{cases}$
- Acumulador: $h[n] = u[n] = \begin{cases} 1, & \text{para } n \geq 0, \\ 0, & \text{para } n < 0 \end{cases}$

Sistemas FIR e IIR

- Los sistemas LIT para los cuales existe un entero positivo N tal que la respuesta al impulso $h[n]$ del sistema cumple que $h[n] = 0$ para $|n| > N$ se llaman sistemas de *respuesta al impulso finita*, o simplemente, sistemas FIR.
- Los sistemas que no cumplen lo anterior son sistemas de *respuesta al impulso infinita* (IIR).
- Ejemplos de sistemas FIR: retardo, promedio móvil, diferencias hacia adelante.
- Ejemplos de sistemas IIR: acumulador.

Estabilidad de un sistema LIT

- Considerar un sistema LIT con respuesta al impulso $h[n]$. Si $x[n] \leq M$ para todo n , entonces

$$\begin{aligned} |T\{x[n]\}| &= \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \right| \\ &\leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[k]| |h[n-k]| \\ &\leq M \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[n-k]| \end{aligned}$$

- De manera que para que el sistema sea estable se requiere que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty,$$

es decir, se requiere que la respuesta al impulso sea absolutamente sumable.

Ecuaciones en diferencias

- Otra manera de describir un sistema LIT es mediante una ecuación en diferencias con coeficientes constantes de la forma

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k],$$

o bien,

$$y[n] = - \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^M b_k x[n-k],$$

donde N es el *orden* del sistema.

- Ejemplo: El sistema acumulador, definido como

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k],$$

puede expresarse también como

$$y[n] - y[n-1] = x[n].$$

Ejemplo: Promedio móvil causal

- El promedio móvil causal puede definirse como

$$y[n] = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N x[n-k]. \quad (1)$$

- Reescrito en forma de ecuación en diferencias, queda como

$$y[n] - y[n-1] = \frac{1}{N+1} (x[n] - x[n-N-1]). \quad (2)$$

- Ejercicios:
 1. Demuestre que las Ecuaciones 1 y 2 son equivalentes.
 2. Suponga que desea obtener el promedio móvil de una señal $x[n]$ de 100 muestras, con $x[n] = 0$ para $n < 0$. Cuántas sumas y cuántas multiplicaciones se requieren para obtener la salida del sistema utilizando la Ecuación 1, y cuántas utilizando la Ecuación 2?

Condiciones iniciales

- Considerar el sistema dado por la ecuación en diferencias

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k].$$

- Para calcular la salida del sistema para una entrada x , es necesario establecer N *condiciones auxiliares*, las cuales pueden especificarse como N valores anteriores de la salida (e.g., $y[-1], \dots, y[-N]$).
- Para que el sistema conserve la linealidad e invarianza temporal, es necesario que el sistema esté *inicialmente en reposo*, lo cual significa que si $x[n] = 0$ para $n < n_0$, entonces la salida $y[n]$ debe ser cero para $n < n_0$.

Ejemplo

- Consideremos el sistema $y[n] = ay[n-1] + x[n]$ con una condición inicial dada por $y[-1]$.
- Si aplicamos una señal de entrada $x[n]$, entonces es fácil ver que la salida para $n \geq 0$ está dada por

$$y[n] = a^{n+1}y[-1] + \sum_{k=0}^n a_k x[n-k].$$

- La *respuesta en estado nulo* y_{zs} del sistema es aquella que se obtiene cuando las condiciones iniciales son nulas. En este caso,

$$y_{zs}[n] = \sum_{k=0}^n a_k x[n-k].$$

- Por otra parte, la *respuesta a la entrada nula* y_{zi} es la que se obtiene cuando la entrada $x[n] = 0$ para toda n . En este caso,

$$y_{zi}[n] = a^{n+1}y[-1].$$

Correlación de señales discretas

- En algunas ocasiones es útil estimar la similitud entre dos señales dadas.
- Una de las medidas de similitud más comunes es la *correlación cruzada*, la cual se define para dos señales reales $x[n]$ y $y[n]$ de energía finita como

$$R_{xy}[l] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y^*[n-l],$$

donde y^* denota el complejo conjugado de y , y l es un parámetro que especifica el retardo (lag) en tiempo de la señal y con respecto a x .

- Notar que $R_{xy}[l] = R_{yx}[-l]$.
- La correlación cruzada se relaciona con la convolución de la manera siguiente:

$$R_{xy}[l] = x[l] * y^*[-l].$$

Autocorrelación

- Un caso particular de la correlación cruzada es cuando las señales x y y son iguales. El resultado se conoce como *autocorrelación* y se define como

$$R_{xx}[l] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]x^*[n-l].$$

- La autocorrelación es útil para encontrar tendencias cíclicas en una señal.
- Notar que $R_{xx}[0] = \sum_n |x[n]|^2$ es la potencia de x , y que $R_{xx}[l] \geq R_{xx}[0]$.
- Así entonces, podemos definir la autocorrelación normalizada de una señal x como

$$\rho_{xx}[l] = \frac{R_{xx}[l]}{R_{xx}[0]}.$$

- También es posible definir la correlación cruzada normalizada como

$$\rho_{xy}[l] = \frac{R_{xy}[l]}{\sqrt{R_{xx}[0]R_{yy}[0]}}.$$

Unidad II

Representación en el dominio de la frecuencia

Respuesta de un sistema a una senoidal compleja

- Consideremos un sistema discreto LIT con respuesta al impulso $h[n]$ y entrada $x[n] = e^{j\omega n}$ para todo n . Entonces, la salida $y[n]$ del sistema puede calcularse como

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{j\omega(n-k)} = e^{j\omega n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k}.$$

- Si definimos $H(e^{j\omega})$ como

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k},$$

entonces podemos escribir la salida del sistema como

$$y[n] = H(e^{j\omega}) e^{j\omega n}.$$

Respuesta de un sistema a una senoidal compleja

- De manera que, si la entrada de un sistema LIT es una senoidal compleja, entonces la salida será la misma senoidal compleja multiplicada por una constante (posiblemente compleja). En otras palabras, las senoidales complejas son *autofunciones* de los sistemas LIT.
- A la función $H(e^{j\omega})$ se le conoce como la *respuesta en frecuencia* asociada al sistema.
- Notar que si la entrada es $x[n] = \sum_k a_k e^{j\omega_k n}$, entonces la salida está dada por

$$y[n] = \sum_k H(e^{j\omega_k}) \alpha_k e^{j\omega_k n}.$$

- Entonces, conociendo la respuesta en frecuencia del sistema, podemos encontrar fácilmente la salida cuando la entrada es una suma de senoidales complejas.
- Notar que, en el caso de los sistemas discretos, la respuesta en frecuencia es periódica (con periodo 2π).

Ejemplo

- Consideremos el promedio móvil simétrico, cuya respuesta en frecuencia es

$$h[n] = \begin{cases} \frac{1}{2N+1} & \text{si } -N \leq n \leq N \\ 0 & \text{para otros } n. \end{cases}$$

- Entonces, la respuesta en frecuencia está dada por

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^N e^{-j\omega k}.$$

- Aplicando la serie geométrica $\sum_{k=m}^n \alpha^k = \frac{\alpha^m - \alpha^{n+1}}{1-\alpha}$, llegamos a que

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2N+1} \frac{\sin \frac{\omega(2N+1)}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}}.$$

Transformada de Fourier

- Muchas secuencias discretas se pueden representar mediante una integral de Fourier:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega,$$

donde

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}.$$

- $X(e^{j\omega})$ se conoce como la *transformada de Fourier* (TF) de $x[n]$, y la primera ecuación representa la *transformada inversa de Fourier* de $X(e^{j\omega})$.
- Entonces, la respuesta en frecuencia de un sistema es la transformada de Fourier de la respuesta al impulso (la cual, a su vez, es la transformada inversa de Fourier de la respuesta en frecuencia).

Ejemplo

- Considerar un filtro pasa-banda de respuesta senoidal, cuya respuesta en frecuencia est dada por:

$$H_{\omega_k, b}(e^{j\omega}) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[1 + \cos \left(\frac{\omega - \omega_k}{b_k} \pi \right) \right], & \text{si } \omega \in [\omega_k - b_k, \omega_k], \\ \frac{1}{2} \left[1 + \cos \left(\frac{\omega - \omega_k}{b} \pi \right) \right], & \text{si } \omega \in [\omega_k, \omega_k + b], \\ 0, & \text{en cualquier otro caso,} \end{cases}$$

donde ω_k es la frecuencia de entonamiento, b es el ancho de banda, y $b_k = \min\{b, \omega_k\}$.

- Ejercicios
 1. Implementar $H_{\omega_k, b}(e^{j\omega})$ como una función de C/C++, Octave, o Matlab.
 2. Implementar una función que calcule la transformada inversa de Fourier $h[n]$ de $H_{\omega_k, b}$ para un valor dado de n , usando integración numérica.

Existencia de la Transformada de Fourier

- Una señal se puede representar mediante una integral de Fourier,

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega,$$

si $|X(e^{j\omega})| < \infty$ para todo ω .

- Es fácil ver que $|X(e^{j\omega})| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|$.
- Por lo tanto, $X(e^{j\omega})$ existe si y solo si $x[n]$ es absolutamente sumable.
- Ya que la respuesta al impulso de un sistema estable es absolutamente sumable, entonces todo sistema estable tiene una respuesta en frecuencia finita y continua.

Ejemplo: filtro pasa-bajas ideal

- Un filtro ideal es aquél que elimina completamente las frecuencias que no son de interés y deja intactas las frecuencias de interés.
- Así, la respuesta en frecuencia de un filtro pasa-bajas ideal puede escribirse como

$$H_{lp}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & \text{si } |\omega| < \omega_c, \\ 0, & \text{si } \omega_c \leq |\omega| \leq \pi, \end{cases}$$

donde ω_c es la *frecuencia de corte* del filtro.

- Aplicando la transformada inversa de Fourier, podemos obtener la respuesta al impulso del filtro, la cual está dada por

$$h_{lp}[n] = \frac{\sin \omega_c n}{\pi n}.$$

- Notar que este filtro no es causal ni estable (debido a la discontinuidad en $\omega = \omega_c$).

Propiedades de simetría

- Una señal $x[n]$ es *simétrica conjugada* si $x[n] = x^*[-n]$, y es *antisimétrica conjugada* si $x[n] = -x^*[-n]$.
- Toda señal $x[n]$ se puede descomponer en una parte simétrica conjugada $x_e[n]$ y una parte antisimétrica conjugada $x_o[n]$ de la manera siguiente:

$$x[n] = x_e[n] + x_o[n],$$

donde

$$x_e[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x^*[-n]), \quad \text{y} \quad x_o[n] = \frac{1}{2}(x[n] - x^*[-n]).$$

- Una señal real se denomina *par* si es simétrica conjugada, e *impar* si es antisimétrica conjugada.
- Similarmente, cualquier función $f(x)$ de una variable real x se puede expresar como la suma de una función simétrica conjugada $f_e(x)$ y una antisimétrica conjugada $f_o(x)$.

Propiedades de simetría de la transformada de Fourier

- Dada una señal $x[n]$ y su transformada de Fourier $X(e^{j\omega})$ tenemos que

La señal	tiene TF
$x^*[n]$	$X^*(e^{-j\omega})$
$x^*[-n]$	$X^*(e^{j\omega})$
$\Re\{x[n]\}$	$X_e(e^{j\omega})$
$j\Im\{x[n]\}$	$X_o(e^{j\omega})$
$x_e[n]$	$\Re\{X(e^{j\omega})\}$
$x_o[n]$	$j\Im\{X(e^{j\omega})\}$

donde $x[n] = x_e[n] + x_o[n]$ y $X(e^{j\omega}) = X_e(e^{j\omega}) + X_o(e^{j\omega})$.

- Si $x[n]$ es real, entonces su transformada de Fourier tiene las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= X^*(e^{-j\omega}) \\ \Re\{X(e^{j\omega})\} &= \Re\{X(e^{-j\omega})\} \\ \Im\{X(e^{j\omega})\} &= -\Im\{X(e^{-j\omega})\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |X(e^{j\omega})| &= |X(e^{-j\omega})| \\ \angle X(e^{j\omega}) &= -\angle X(e^{-j\omega}) \end{aligned}$$

Propiedades de la transformada de Fourier

- Dadas las señales $x[n]$ y $y[n]$, con transformadas de Fourier $X(e^{j\omega})$ y $Y(e^{j\omega})$, respectivamente, entonces se tienen las siguientes propiedades:

Propiedad	La señal	tiene TF
Linealidad	$ax[n] + by[n]$	$aX(e^{j\omega}) + bY(e^{j\omega})$
Retardo temporal	$x[n - n_d], n_d \in \mathbb{Z}$	$e^{-j\omega n_d} X(e^{j\omega})$
Desplazamiento en frecuencia	$e^{j\omega_0 n} x[n]$	$X(e^{j(\omega - \omega_0)})$
Reflexión temporal	$x[-n]$	$X(e^{-j\omega})$
Reflexión temporal	$x[-n], x[n] \in \mathbb{R}$	$X^*(e^{j\omega})$
Diferenciación en frecuencia	$nx[n]$	$j \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$
Convolución en tiempo	$x[n] * y[n]$	$X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$
Producto en tiempo	$x[n]y[n]$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta}) Y(e^{j(\omega - \theta)}) d\theta$

Teorema de Parseval

- Si la transformada de Fourier de una señal $x[n]$ es $X(e^{j\omega})$, entonces se cumple que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega.$$

- La función $|X(e^{j\omega})|^2$ se conoce como la *densidad espectral de potencia* o simplemente el *espectro de potencia* de la señal $x[n]$.
- En general, también se cumple que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y^*[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})Y^*(e^{j\omega})d\omega,$$

es decir, la correlación cruzada con lag cero de dos señales medida en el dominio del tiempo es proporcional a la correlación cruzada en el dominio de la frecuencia.

Transformadas de Fourier de señales comunes

Secuencia	Transformada de Fourier
1. $\delta[n]$	1
2. $\delta[n - n_0]$	$e^{-j\omega n_0}$
3. 1 $(-\infty < n < \infty)$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega + 2\pi k)$
4. $a^n u[n]$ $(a < 1)$	$\frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$
5. $u[n]$	$\frac{1}{1 - e^{j\omega}} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi\delta(\omega + 2\pi k)$
6. $(n + 1)a^n u[n]$ $(a < 1)$	$\frac{1}{(1 - ae^{-j\omega})^2}$
7. $\frac{r^n \sin \omega_p (n + 1)}{\sin \omega_p} u[n]$ $(r < 1)$	$\frac{1}{1 - 2r \cos \omega_p e^{-j\omega} + r^2 e^{-j2\omega}}$
8. $\frac{\sin \omega_c n}{\pi n}$	$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & \omega < \omega_c \\ 0, & \omega_c < \omega \leq \pi \end{cases}$
9. $x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$	$\frac{\sin[\omega(M + 1)/2]}{\sin(\omega/2)} e^{-j\omega M/2}$
10. $e^{j\omega_0 n}$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0 + 2\pi k)$
11. $\cos(\omega_0 n + \phi)$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} [\pi e^{j\phi}\delta(\omega - \omega_0 + 2\pi k) + \pi e^{-j\phi}\delta(\omega + \omega_0 + 2\pi k)]$

*Oppenheim, A., Schaffer, R.W. Tratamiento de señales en tiempo discreto. Prentice Hall.

Filtros ideales

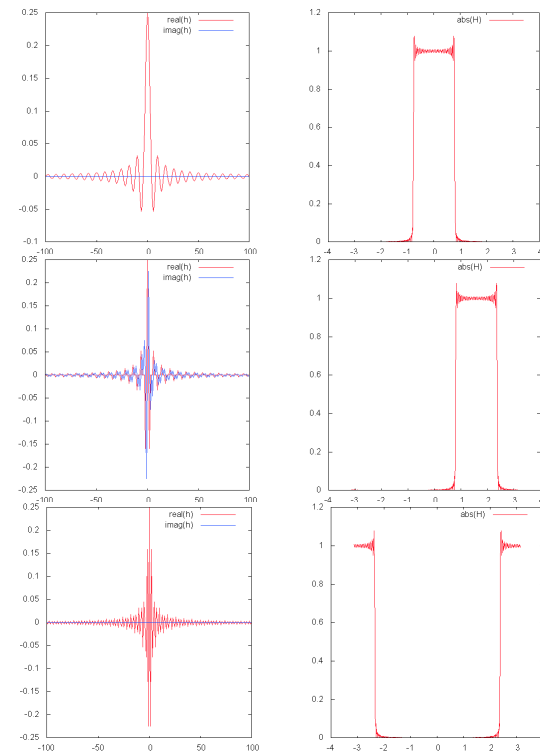
Utilizando la propiedad de desplazamiento en frecuencia de la transformada de Fourier, se puede obtener un filtro pasa-banda o pasa-altas a partir de un pasa-bajas:

$$\mathcal{F}\{x[n]e^{j\omega_0 n}\} = X(e^{j(\omega-\omega_0)}) .$$

Filtro pasa-bajas ideal con kernel $h[n] = \frac{\sin \omega_c n}{\pi n}$ y frecuencia de corte $\omega_c = \pi/4$

Pasa-banda ideal con kernel $h[n] \exp(j\omega_0 n)$ entonado en $\omega_0 = \pi/2$ y ancho de banda $\Delta\omega = \pi/4$

Pasa-altas ideal con kernel $h[n] \exp(j\pi n)$ y frecuencia de corte $\omega_c = \pi - \pi/4$



Filtro Gaussiano

- Consideremos un filtro de promedio móvil simétrico, cuya respuesta al impulso es

$$h[n] = \begin{cases} \frac{1}{2N+1}, & \text{para } -N \leq n \leq N, \\ 0, & \text{para otros valores de } n. \end{cases}$$

- Si aplicamos el filtro m veces a una señal de entrada $x[n]$, entonces la salida $y[n]$ está dada por

$$y[n] = x[n] * g_m[n],$$

donde

$$g_m[n] = \underbrace{h[n] * h[n] * \dots * h[n]}_{m \text{ veces}}$$

- Conforme se incrementa m , la forma del kernel $g_m[n]$ se aproxima a una curva Gaussiana $g[n]$:

$$g[n] = \lim_{m \rightarrow \infty} g_m[n] = \frac{1}{\sigma_n \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{n^2}{2\sigma_n^2}},$$

donde σ_n es la *desviación estándar* del kernel.

Integral de una Gaussiana

- Sea I la integral de una Gaussiana de la forma e^{-ax^2} :

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ay^2} dy.$$

- Entonces, $I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x^2+y^2)} dx dy$.
- Cambiando a coordenadas polares (r, θ) , tenemos que

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{-ar^2} r dr d\theta \\ &= \int_0^{\infty} 2\pi r e^{-ar^2} dr \\ &= -\frac{\pi}{a} \left[e^{-r^2} \right]_0^{\infty} \\ &= \frac{\pi}{a} \end{aligned}$$

- Por lo tanto, $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$.

Transformada de Fourier de una Gaussiana

- Aplicando lo anterior, se puede mostrar que la transformada de Fourier de una Gaussiana (continua) es también una Gaussiana:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left\{e^{-at^2}\right\} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} e^{-j\omega t} dt \\&= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-a\left[t^2 + \frac{j\omega t}{a} + \left(\frac{j\omega}{2a}\right)^2\right]\right\} \cdot \exp\left\{a\left(\frac{j\omega}{2a}\right)^2\right\} dt \\&= \exp\left\{a\left(\frac{j\omega}{2a}\right)^2\right\} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-a\left(t + \frac{j\omega}{2a}\right)^2\right\} dt \\&= e^{-\frac{\omega^2}{4a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-as^2} ds, \quad \text{donde } s = t + \frac{j\omega}{2a} \\&= \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}.\end{aligned}$$

Respuesta en frecuencia del filtro Gaussiano

- Consideremos un filtro Gaussiano cuya respuesta al impulso $g[n]$ está dada por

$$g[n] = \frac{1}{\sigma_n \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{n^2}{2\sigma_n^2}}.$$

- Entonces, la respuesta en frecuencia $G(e^{j\omega})$ del filtro está dada por

$$G(e^{j\omega}) = e^{-\frac{\omega^2}{2\sigma_\omega^2}},$$

donde $\sigma_\omega = \frac{1}{\sigma_t}$.

Filtros de Gabor

- Un filtro de Gabor es básicamente un filtro pasa-banda con respuesta Gaussiana.
- Puede obtenerse aplicando la propiedad de desplazamiento en frecuencia al filtro Gaussiano.
- La respuesta en frecuencia de un filtro de Gabor entonado a una frecuencia ω_0 está dada por

$$G(e^{j\omega}) = e^{-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{2\sigma_\omega^2}},$$

y su respuesta al impulso es

$$g[n] = \frac{1}{\sigma_n \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{n^2}{2\sigma_n^2}} e^{-j\omega_0 n}.$$

Unidad III

Transformada Discreta de Fourier

Periodicidad en tiempo discreto

- Una señal discreta $x[n]$ es periódica si existe un entero $N \neq 0$ tal que

$$x[n] = x[n + N]$$

para todo n . En este caso, decimos que $x[n]$ tiene periodo N .

- Notar que no cualquier señal senoidal o exponencial compleja es periódica. Por ejemplo,

- $x[n] = \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)$ es periódica

- $x[n] = e^{j3n}$ no es periódica

- En general, una secuencia de la forma $x[n] = e^{j\omega n}$ es periódica si y solo si la frecuencia de la señal cumple que

$$\omega = \frac{2\pi k}{N},$$

para algún entero k .

Componentes de frecuencia de una señal periódica

- Sea $x[n] = \exp\left(j\frac{2\pi k'}{N}n\right)$ una señal periódica con periodo N .
- Si $k' = N + k$ entonces tenemos que

$$\begin{aligned}x[n] &= \exp\left(j\frac{2\pi(N+k)}{N}n\right) \\&= \exp(j2\pi n) \exp\left(j\frac{2\pi k}{N}n\right) \\&= \exp\left(j\frac{2\pi k}{N}n\right)\end{aligned}$$

- Por lo tanto, en una señal discreta periódica pueden existir solamente hasta N frecuencias distinguibles, las cuales están dadas por

$$\omega_k = \frac{2\pi k}{N},$$

para $k = 0, 1, \dots, N-1$.

Componentes de frecuencia de una señal periódica

- Sea $x[n]$ periódica con periodo N . Su transformada de Fourier está dada por

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n},$$

y la señal reconstruída se obtiene mediante la transformada inversa de Fourier como

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega.$$

- Sin embargo, las únicas frecuencias que pueden estar presentes en $x[n]$ son aquellas que tienen periodicidad N ; es decir, aquellas de la forma $2\pi k/N$, para $k = 0, \dots, N-1$.

Transformada discreta de Fourier

- Entonces, una señal periódica $x[n]$ con periodo N puede reconstruirse como

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \exp \left(j \frac{2\pi k}{N} n \right), \quad (3)$$

- Para obtener los coeficientes $X[k]$, podemos multiplicar la ecuación anterior por $\exp(-j \frac{2\pi k}{N} n)$ y sumar sobre n . Así llegamos a que

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp \left(-j \frac{2\pi k}{N} n \right). \quad (4)$$

- La ecuación 4 se conoce como la *transformada discreta de Fourier* de $x[n]$, mientras que la ecuación 3 es la *transformada inversa discreta de Fourier* (TDF).

TDF de señales finitas

- Sea $x[n]$, $0 \leq n \leq N-1$ una señal finita de duración N . Es decir, $x[n] = 0$ para $n < 0$ y $n \geq N$.
- Asociamos a $x[n]$ una señal periódica $\tilde{x}[n]$ con periodo N , dada por

$$\tilde{x}[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n - rN],$$

o simplemente, $\tilde{x}[n] = x[(n)_N]$, donde $(x)_N$ denota x módulo N ; es decir, $(x)_N = r$ tal que $x = qN + r$ con q entero y $0 \leq r < N$.

- La TDF $\tilde{X}[k]$ de $\tilde{x}[n]$ es también una secuencia periódica con periodo N , a partir de la cual podemos extraer un solo periodo para formar la señal finita $X[k]$, dada por

$$X[k] = \begin{cases} \tilde{X}[k], & \text{si } 0 \leq k \leq N-1, \\ 0, & \text{para otros valores de } k. \end{cases}$$

- De esta manera, a $X[k]$ se le llama la transformada discreta de Fourier de $x[n]$.

Convolución circular

- Sean $x_1[n]$ y $x_2[n]$ dos secuencias finitas de longitud N , y sean $X_1[k]$ y $X_2[k]$ sus respectivas transformadas discretas de Fourier.
- Si se define $X_3[k] = X_1[k]X_2[k]$, entonces la secuencia $x_3[n]$ cuya TDF es $X_3[k]$ está dada por

$$x_3[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x_1[m]x_2[(n-m)_N],$$

- La operación anterior se conoce como la *convolución circular* de $x_1[n]$ y $x_2[n]$ y se puede representar como

$$x_1[n] \circledast x_2[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x_1[m]x_2[(n-m)_N].$$

Propiedades de la transformada discreta de Fourier

Propiedad	Señal	TDF
Linealidad	$ax_1[n] + bx_2[n]$	$aX_1[k] + bX_2[k]$
Dualidad	$X[n] = \text{TDF}\{x[n]\}$	$Nx[(-k)_N]$
Desplazamiento circular	$x[(n - m)_N]$	$e^{-j(2\pi k/N)m} X[k]$
Desplazamiento en frecuencia	$e^{j(2\pi k_0/N)n} x[n]$	$X[(k - k_0)_N]$
Convolución periódica	$x_1[n] \circledast x_2[n]$	$X_1[k] X_2[k]$
Producto	$x_1[n] x_2[n]$	$\frac{1}{N} X_1[k] \circledast X_2[k]$

Transformada rápida de Fourier (FFT)

- El cómputo de la TDF mediante la fórmula

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi k}{N}n}, \quad k = 0, \dots, N-1$$

requiere aproximadamente N^2 multiplicaciones complejas y N^2 sumas complejas, por lo tanto, tiene una complejidad de orden $O(N^2)$.

- Existen varios algoritmos para calcular la transformada discreta de Fourier de una manera más eficiente. Uno de los algoritmos más comunes se basa en el concepto de *diezmado en tiempo*, el cual divide el cómputo de una TDF de longitud N par en dos TDF de longitud $N/2$.

FFT mediante diezmado en tiempo

- El diezmado en tiempo se logra separando los índices pares e impares en la sumatoria de la TDF:

$$\begin{aligned} X[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j \frac{2\pi k}{N} n} \\ &= \sum_{n \text{ par}} x[n] e^{-j \frac{2\pi k}{N} n} + \sum_{n \text{ impar}} x[n] e^{-j \frac{2\pi k}{N} n} \\ &= \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r] e^{-j \frac{2\pi k}{N} 2r} + \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r+1] e^{-j \frac{2\pi k}{N} (2r+1)} \\ &= \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r] e^{-j \frac{2\pi k}{N/2} r} + e^{-j \frac{2\pi k}{N}} \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r+1] e^{-j \frac{2\pi k}{N/2} r} \\ &= G[k] + e^{-j \frac{2\pi k}{N}} H[k] \end{aligned}$$

donde $G[k]$ es la TDF de la señal $x[2r]$, y $H[k]$ es la TDF de $x[2r+1]$ para $r = 0, \dots, N/2 - 1$, y son periódicas con periodo $N/2$.

FFT mediante diezmado en tiempo

- Para una señal $x[n]$ de longitud N par, tenemos entonces que

$$X[k] = G[k] + e^{-j\frac{2\pi k}{N}} H[k],$$

donde $G[k] = \text{TDF}\{x[2r]\}$ y $H[k] = \text{TDF}\{x[2r+1]\}$, $r = 0, \dots, N/2 - 1$.

- Si $N/2$ es par, entonces $G[k]$ y $H[k]$ pueden calcularse de manera similar, como la suma de dos TDF de longitud $N/4$.
- En particular, si $N = 2^m$, entonces el diezmado en tiempo se puede aplicar $m - 1$ veces de manera sucesiva o recursiva para calcular $X[k]$, lo cual tiene una complejidad de orden $O(N \log_2 N)$.
- Después de aplicar el diezmado $m - 1$ veces, uno llega a calcular TDF's de longitud 2, lo cual es trivial: si $N = 2$, entonces tenemos que

$$X[0] = x[0] + x[1], \quad X[1] = x[0] - x[1].$$

Ejercicios

1. Implemente la transformada discreta de Fourier (DFT) en C/C++ (implementación ingenua).
2. Implemente la transformada rápida de Fourier (FFT) en C/C++ para una señal de longitud N de la manera siguiente:
 - (a) Si N es impar, llamar a la función que calcula la DFT.
 - (b) Si N es par y mayor que 2, aplicar el diezmado en tiempo, calculando las transformadas $G[k]$ y $H[k]$ de manera recursiva.
 - (c) Si $N = 2$, calcular directamente la DFT como un caso trivial.
3. Implemente la transformada discreta inversa de Fourier utilizando la FFT del inciso (2) y la propiedad de dualidad.

Unidad IV

Muestreo de señales en tiempo continuo

Impulso continuo

- El impulso continuo $\delta(x)$, también llamado *delta de Dirac* se puede definir como

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty, & x = 0, \\ 0, & x \neq 0, \end{cases}$$

sujeta a

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1.$$

- La delta de Dirac puede definirse también (más formalmente) como el límite de una distribución Gaussiana cuando la varianza tiende a cero:

$$\delta(x) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}.$$

- El impulso continuo tiene también la siguiente propiedad para cualquier función $f(x)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - a) dx = f(a).$$

Muestreo de señales en tiempo continuo

- Típicamente, las señales discretas provienen de muestrear señales o funciones continuas.
- Uno obtiene una señal en tiempo discreto $x[n]$ a partir de una señal en tiempo continuo $x_c(t)$ como

$$x[n] = x_c(nT), \quad n \in \mathbb{Z},$$

donde T es el periodo de muestreo (en segundos), y $2\pi/T$ es la frecuencia de muestreo (rad/s).

Muestreo de señales en tiempo continuo

- Matemáticamente, el proceso de muestreo consta de dos etapas:
 1. Modular la señal de entrada x_c con un tren de impulsos (peine de Dirac) $s(t)$ espaciados cada T segundos. El tren de impulsos se define como

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT).$$

Por lo tanto, la señal modulada $x_s(t)$ se puede escribir como

$$\begin{aligned} x_s(t) &= x_c(t)s(t) \\ &= x_c(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT)\delta(t - nT) \end{aligned}$$

2. Conversión de la señal modulada $x_s(t)$ en una secuencia en tiempo discreto $x[n] = x_s(nT)$.

Transformada de Fourier de un tren de impulsos

- La transformada de Fourier de un tren de impulsos periódico con periodo T es otro tren de impulsos periódico con periodo $2\pi/T$ rad/s.
- Por lo tanto, si $s(t)$ está dado por

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT),$$

entonces

$$S(\Omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_s),$$

donde $\Omega_s = 2\pi/T$.

Transformada de Fourier de un tren de impulsos modulado

- Sea $x_s(t) = x_c(t)s(t)$ la señal x_c modulada por un tren de impulsos $s(t)$ con periodo T .
- Aplicando las propiedades de la transformada de Fourier, tenemos que

$$\begin{aligned} X_s(\Omega) &= \frac{1}{2\pi} X_c(\omega) * S(\omega) \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(\Omega - k\Omega_s). \end{aligned}$$

- Por lo tanto, la transformada de Fourier de $x_s(t)$ es la suma de infinitas copias de la transformada de Fourier de $x_c(t)$, desplazadas en múltiplos enteros de Ω_s .
- Es claro, entonces, que para que las copias de $X_c(t)$ no se traslapen, se requiere que

$$|X_c(\Omega)| = 0, \quad |\Omega| > \Omega_s/2.$$

Teorema de muestreo de Nyquist

- Sea $x_c(t)$ una señal de banda limitada, de manera que

$$|X_c(\Omega)| = 0, \text{ para } |\Omega| \geq \Omega_N.$$

- Entonces, $x_c(t)$ puede recuperarse de manera única a partir de las muestras

$$x[n] = x_c(nT), \quad n \in \mathbb{Z},$$

si se cumple que

$$\Omega_s = \frac{2\pi}{T} \geq 2\Omega_N.$$

- La frecuencia $\Omega_s/2$ se conoce como *frecuencia de Nyquist*.

Reconstrucción de señales de banda limitada

- De una señal discreta $x[n]$ podemos recuperar el tren de impulsos $x_s(t)$ como

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta(t - nT),$$

donde T es el periodo de muestreo.

- Consideremos un filtro pasa-bajas ideal con frecuencia de corte π/T . La respuesta al impulso de este filtro está dada por

$$h_r(t) = \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T}.$$

- Sea $x_r(t)$ la salida de este filtro cuando la entrada es x_s ; es decir,

$$x_r(t) = x_s(t) * h_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \frac{\sin[\pi(t - nT)/T]}{\pi(t - nT)/T}.$$

Reconstrucción de señales de banda limitada

- Ya que $h_r(0) = 1$, y $h_r(nT) = 0$ para $n = \pm 1, \pm 2, \dots$, entonces es claro que

$$x_r(mT) = x[m].$$

- En otras palabras, $h_r(t)$ actúa como un interpolador que permite reconstruir una señal en tiempo continuo a partir de las muestras $x[n]$.
- Se puede demostrar que si $x[n]$ se obtiene muestreando una señal continua $x_c(t)$ con un periodo de muestreo T suficiente para cumplir el teorema de Nyquist, entonces la señal reconstruida $x_r(t)$ será idéntica a $x_c(t)$ para todo t .

Unidad V

Transformada Z

Definición

- La transformada Z es una forma generalizada de la transformada de Fourier con las siguientes ventajas:
 1. Puede converger en algunos casos donde la transformada de Fourier no converge.
 2. En muchos casos es más conveniente para resolver problemas de manera analítica.
 3. Es más conveniente para el diseño y estudio de sistemas IIR dados mediante ecuaciones en diferencias.
- La transformada Z de una señal $x[n]$ se define como

$$\mathcal{Z}\{x[n]\} = X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

- Si $z = e^{j\omega}$, entonces la transformada Z es igual a la transformada de Fourier; es decir, la TF es igual a la TZ evaluada en el círculo unitario.

Convergencia de la transformada Z

- En general, cualquier complejo z puede representarse en forma polar como $z = re^{j\omega}$, $r > 0$, $0 \leq \omega < 2\pi$.
- Por lo tanto, la transformada Z de $x[n]$ se puede escribir como

$$\begin{aligned} X(z) &= X(re^{j\omega}) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]r^{-n}e^{-j\omega n} \\ &= \mathcal{F}\{x[n]r^{-n}\}. \end{aligned}$$

- Ya que la TF de una señal converge solamente si la señal es absolutamente sumable, entonces $X(z)$ converge solamente si

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]r^{-n}| < \infty, \quad r = |z|.$$

- Notar que es posible que para algunas señales, es posible que la TZ converja (para algunos valores de z), aún cuando la TF no converja (e.g., la señal $u[n]$).

Región de convergencia

- La *región de convergencia* (RDC) de la TZ de una señal $x[n]$ es el conjunto de valores de z para los cuales $X(z)$ converge; es decir,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]r^{-n}| < \infty, \quad r = |z|.$$

- La convergencia depende solamente de la magnitud de z , pero no del ángulo, por lo tanto, la región de convergencia es simplemente un anillo de la forma $a \leq |z| \leq b$ centrado en el origen. En algunos casos, el anillo puede extenderse hacia dentro e incluir al origen, mientras que en otros puede extenderse infinitamente hacia el exterior.
- Ejemplo: considerar la señal $x[n] = u[n]$. Ya que $u[n]r^{-n}$ es absolutamente sumable para $r > 1$, entonces la RDC de $X(z)$ es $|z| > 1$.

Transformada Z racional

- Los casos en los que la transformada Z es de mayor utilidad, es cuando ésta se puede expresar como una ecuación cerrada, en lugar de una suma infinita.
- En particular, uno de los casos más útiles es cuando la transformada Z se puede expresar como un cociente de polinomios:

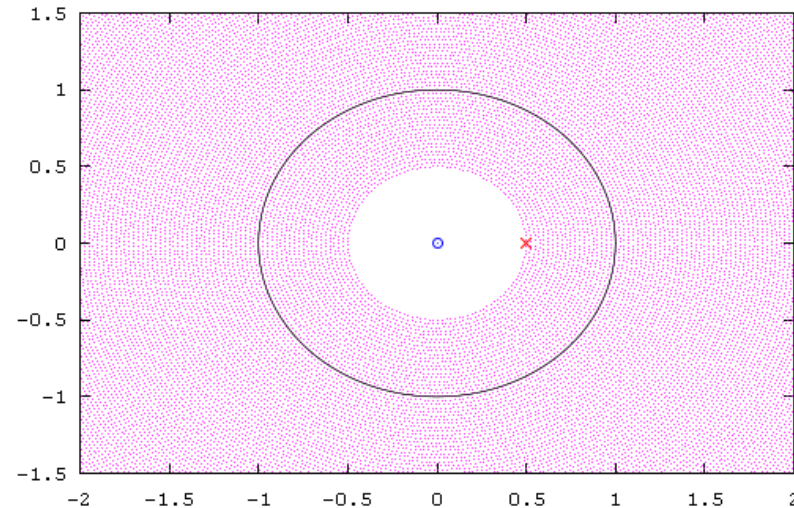
$$X(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}.$$

- Los valores en los cuales $P(z) = 0$ se llaman *ceros*, ya que en esos valores $X(z) = 0$.
- Los valores en los cuales $Q(z) = 0$ se llaman *polos*. Ya que $X(z) = \pm\infty$ para estos valores, entonces los polos no pueden pertenecer a la región de convergencia; sin embargo, la región de convergencia está delimitada por los polos.

Ejemplo 1

- Sea $x[n] = a^n u[n]$. Entonces,

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[n] z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n \\ &= \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > |a| \\ &= \frac{z}{z - a}, \quad |z| > |a|. \end{aligned}$$

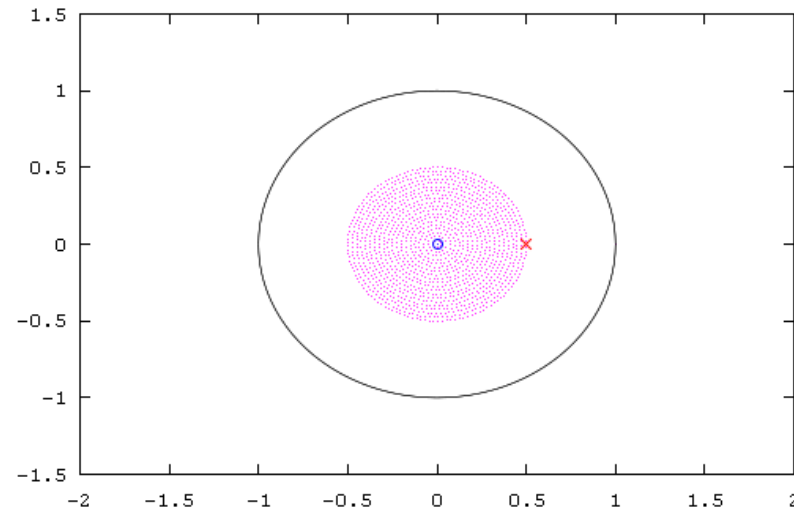


- Por lo tanto, $X(z)$ tiene un cero en $z = 0$ y un polo en $z = a$.
- Ya que la RDC contiene al círculo unitario, entonces la transformada de Fourier de $x[n]$ existe.

Ejemplo 2

- Sea $x[n] = -a^n u[-n-1] = \begin{cases} -a^n, & n < 0, \\ 0, & n \geq 0. \end{cases}$. Entonces,

$$\begin{aligned} X(z) &= - \sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n} \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} a^{-n} z^n \\ &= 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (a^{-1} z)^n \\ &= 1 - \frac{1}{1 - a^{-1} z}, \quad |z| < |a| \\ &= \frac{z}{z - a}, \quad |z| < |a|. \end{aligned}$$



- Notar que, al igual que en el ejemplo anterior, $X(z)$ tiene también un cero en $z = 0$ y un polo en $z = a$, pero su región de convergencia es distinta y no incluye al círculo unitario.

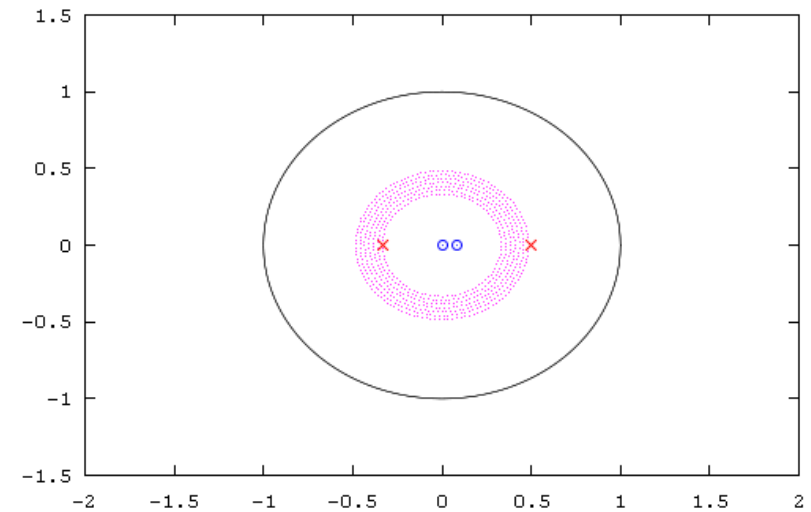
Ejemplo 3

- Sea $x[n] = \left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n] - \left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1]$. Entonces, aplicando la propiedad de linealidad de la transformada Z, tenemos que

$$X(z) = \frac{z}{z + \frac{1}{3}} + \frac{z}{z - \frac{1}{2}}, \quad \frac{1}{3} < |z| < \frac{1}{2}.$$

Desarrollando y factorizando:

$$X(z) = \frac{2z \left(z - \frac{1}{12}\right)}{\left(z + \frac{1}{3}\right) \left(z - \frac{1}{2}\right)}, \quad \frac{1}{3} < |z| < \frac{1}{2}.$$



- Por lo tanto, $X(z)$ tiene dos ceros en $z = 0$ y $z = \frac{1}{12}$, y dos polos en $z = -\frac{1}{3}$ y $z = \frac{1}{2}$.
- En este ejemplo, la transformada de Fourier de $x[n]$ tampoco existe, ya que la RDC no contiene al círculo unitario.

Propiedades de la transformada Z

Propiedad	Señal	TDF
Linealidad	$ax_1[n] + bx_2[n]$	$aX_1(z) + bX_2(z)$
Desplazamiento temporal	$x[n - n_d]$	$z^{-n_d} X(z)$
Escalamiento en frecuencia	$z_0^n x[n]$	$X(z/z_0)$
Reverso	$x[-n]$	$X(z^{-1})$
Conjugado	$x^*[n]$	$X^*(z^*)$
Diferenciación	$nx[n]$	$-z \frac{dX(z)}{dz}$
Convolución	$x_1[n] * x_2[n]$	$X_1(z)X_2(z)$

Algunas transformadas Z comunes

Secuencia	Transformada Z	Región de convergencia
$\delta[n - m]$	z^{-m}	$z \in \mathbb{C}$
$a^n u[n]$	$\frac{z}{z-a}$	$ z > a $
$-a^n u[-n - 1]$	$\frac{z}{z-a}$	$ z < a $
$na^n u[n]$	$\frac{az}{(z-a)^2}$	$ z > a $
$-na^n u[-n - 1]$	$\frac{az}{(z-a)^2}$	$ z < a $
$(r^n \cos \omega_0 n) u[n]$	$\frac{z(z-r \cos \omega_0)}{z^2-(2r \cos \omega_0)z+r^2}$	$ z > r$
$(r^n \sin \omega_0 n) u[n]$	$\frac{(r \sin \omega_0)z}{z^2-(2r \cos \omega_0)z+r^2}$	$ z > r$

Transformada Z inversa

- Formalmente, la inversa de la transformada Z se define como

$$x[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz,$$

donde C es un contorno cerrado (en sentido contrario a las manecillas del reloj) completamente contenido en la región de convergencia, y que encierra al origen.

- Un caso especial se da cuando el contorno C es precisamente el círculo unitario. En este caso, la inversa de la transformada Z es precisamente la transformada inversa de Fourier.
- Existen también otras técnicas que pueden aplicarse en varios casos:
 1. Inversión mediante inspección
 2. Descomposición en fracciones simples
 3. Series de potencias

Inversión mediante inspección

- Este método consiste simplemente en tratar de reconocer parejas de señales y sus transformadas, y utilizar las propiedades de la transformada Z, para encontrar la transformada inversa.
- Es necesario estar familiarizado con las transformadas de algunas señales comunes.
- Ejemplo 1: Se puede ver que la transformada Z inversa de

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{2},$$

es $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$.

- Ejemplo 2: La transformada Z inversa de

$$X(z) = \frac{0.2z}{(z - 0.2)^2} - \frac{z^2}{z - 1}, \quad 0.2 < |z| < 1,$$

es $x[n] = n(0.2)^n u[n] + u[-n]$. (notar que $u[-n] = u[-n - 1] * \delta[n + 1]$).

Inversión mediante descomposición en fracciones

- Si la transformada Z de una señal está dada como un cociente de polinomios $X(z) = P(z)/Q(z)$, entonces puede factorizarse como

$$X(z) = \frac{b_0 \prod_{k=1}^M (1 - c_k z^{-1})}{a_0 \prod_{k=1}^N (1 - d_k z^{-1})},$$

donde las c_k 's y d_k 's son, respectivamente, los ceros y polos distintos de cero.

- Si $M < N$, entonces $X(z)$ puede expresarse como

$$X(z) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - d_k z^{-1}},$$

donde $A_n = [(1 - d_n z^{-1})X(z)]_{z=d_n}$.

- Si $M \geq N$, entonces se puede realizar una división de polinomios para obtener

$$X(z) = \sum_{r=0}^{M-N} B_r z^{-r} + \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - d_k z^{-1}}.$$

Inversión mediante descomposición en fracciones

- Una vez realizada la descomposición en fracciones simples, la transformada Z inversa puede obtenerse fácilmente mediante inspección.
- Ejemplo: Encontrar la inversa de $X(z) = \frac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{1-3z^{-1}+2z^{-2}}$, $|Z| > 2$.
- Realizando la división de polinomios, $X(z) = \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2} + \frac{7}{2}z^{-1}}{1-3z^{-1}+2z^{-2}}$.
- Factorizando el denominador, llegamos a que $X(z) = \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2} + \frac{7}{2}z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-2z^{-1})}$.
- Descomponiendo en fracciones: $X(z) = \frac{1}{2} - \frac{4}{1-z^{-1}} + \frac{\frac{9}{2}}{1-2z^{-1}}$.
- Mediante inspección llegamos a que $x[n] = \frac{1}{2}\delta[n] - 4u[n] + \frac{9}{2}2^n u[n]$.

Inversión mediante series de potencias

- Ya que la transformada Z se define como una serie de potencias de la forma

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n},$$

entonces, los valores de la secuencia $x[n]$ son simplemente los coeficientes de z^{-n} cuando $X(z)$ se expresa como una serie de potencias en z .

- Ejemplo: Considerar $X(z) = z^2(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 + z^{-1})(1 - z^{-1})$. Entonces $X(z)$ puede reescribirse como

$$X(z) = z^2 - \frac{1}{2}z - 1 + \frac{1}{2}z^{-1},$$

de manera que

$$x[n] = \delta[n + 2] - \frac{1}{2}\delta[n + 1] - \delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n - 1].$$

Representación de sistemas LIT en el dominio Z

- Consideremos un sistema LIT definido mediante una ecuación en diferencias:

$$a_0y[n] + a_1y[n-1] + \dots + a_qy[n-q] = b_0x[n] + b_1x[n-1] + \dots + b_rx[n-r].$$

- Aplicando la transformada Z a ambos lados de la ecuación, obtenemos lo siguiente:

$$a_0Y(z) + a_1z^{-1}Y(z) + \dots + a_qz^{-q}Y(z) = b_0X(z) + b_1z^{-1}X(z) + \dots + b_rz^{-r}X(z)$$

$$Y(z) [a_0 + a_1z^{-1} + \dots + a_qz^{-q}] = X(z) [b_0 + b_1z^{-1} + \dots + b_rz^{-r}]$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + \dots + b_rz^{-r}}{a_0 + a_1z^{-1} + \dots + a_qz^{-q}}.$$

Representación de sistemas LIT en el dominio Z

- Por otro lado, si la respuesta al impulso del sistema es $h[n]$, entonces

$$Y(z) = \mathcal{Z}\{y[n]\} = \mathcal{Z}\{x[n] * h[n]\} = X(z)H(z),$$

por lo cual

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_r z^{-r}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_q z^{-q}}.$$

- $H(z)$ se conoce como la *función de transferencia* del sistema.
- De la ecuación anterior se pueden obtener los polos y ceros simplemente multiplicando y dividiendo por una potencia suficientemente grande de z (para eliminar las potencias negativas), o bien, como los recíprocos de las raíces de los polinomios en z^{-1} .
- Notar que para que los coeficientes a_k y b_k sean reales, es necesario que los ceros y los polos sean reales o pares complejos conjugados.

Ejemplo: filtro pasa-bajas de un polo

- Consideremos el sistema definido por la siguiente ecuación en diferencias

$$y[n] = py[n-1] + (1-p)x[n], \quad 0 \leq p < 1.$$

- Reescribiendo la ecuación como $y[n] - py[n-1] = (1-p)x[n]$ y tomando la transformada Z en ambos lados de la ecuación, obtenemos la función de transferencia del sistema, dada por

$$H(z) = \frac{1-p}{1-pz^{-1}} = (1-p)\frac{z}{z-p},$$

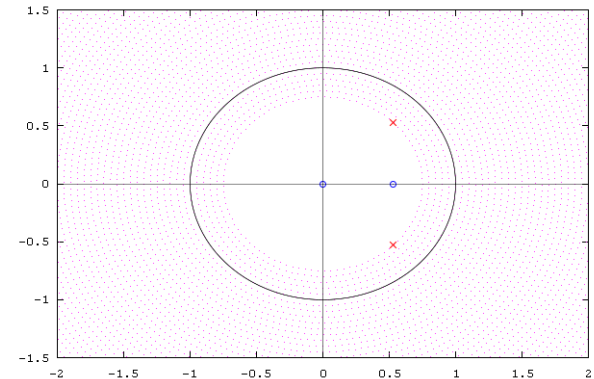
la cual tiene un cero en $z = 0$ y un polo en $z = p$.

- Ya que el sistema es causal, entonces la región de convergencia es $|z| > |p|$, lo cual significa que el sistema es estable para $|p| < 1$.
- Ejercicio: Grafique la respuesta en frecuencia $|H(e^{j\omega})|$ del sistema para $p = 0, 0.3, 0.6, 0.9$. Verifique que el sistema corresponde efectivamente a un filtro pasa-bajas.

Ejemplo: filtro resonante de dos polos

- Considerar el sistema cuya función de transferencia corresponde al diagrama polo-cero mostrado. Los polos y ceros están dados por:

$$\begin{aligned}p_1 &= re^{j\omega_0} \\p_2 &= re^{-j\omega_0} \\z_1 &= 0 \\z_2 &= r \cos \omega_0\end{aligned}$$



- Es fácil verificar que la función de transferencia es

$$H(z) = \frac{z^2 - (r \cos \omega_0)z}{z^2 - (2r \cos \omega_0)z + r^2}, \quad |z| > |r|.$$

- Multiplicando el numerador y denominador de $H(z)$ por z^{-2} podemos encontrar los coeficientes de la ecuación en diferencias del sistema, la cual está dada por

$$y[n] = x[n] - (r \cos \omega_0)x[n-1] + (2r \cos \omega_0)y[n-1] + r^2y[n-2].$$

Unidad VI

Diseño de filtros digitales

Teorema de escalamiento de la transformada de Fourier

- Consideremos una señal en tiempo continuo $x(t)$ a la cual se le aplica una transformación de escalamiento en tiempo $y(t) = x(at)$, $a > 0$.

- Es fácil mostrar que la TF de la señal escalada es

$$\mathcal{F}\{x(at)\} = \frac{1}{a} X\left(e^{j\omega/a}\right).$$

- Esto significa que si ensanchamos una señal en tiempo, entonces su espectro de frecuencias se hará más angosto, y viceversa.

Principio de incertidumbre de Heisenberg

- Una consecuencia directa del teorema de escalamiento, es que no es posible tener señales que sean al mismo tiempo angostas en tiempo (e.g., de corta duración) y angostas en frecuencia.
- Entonces, de una manera muy vaga, podemos establecer el *principio de incertidumbre* para una señal x como

$$\Delta t \cdot \Delta \omega \geq c,$$

donde Δt representa el ancho en tiempo o duración de la señal, $\Delta \omega$ representa el ancho de banda, y c es una constante.

- Para poder determinar c , se suelen definir Δt y $\Delta \omega$ desde un punto de vista estadístico.

Momentos de una función

- El n -ésimo momento de una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ alrededor del punto c se define como

$$\mu_n = \int_{-\infty}^{\infty} (x - c)^n f(x) dx.$$

- Los momentos alrededor de cero se conocen simplemente como los momentos de la función. El primer momento se denota simplemente como $\mu = \mu_1$.
- Los *momentos centrales* son aquellos que se toman alrededor de μ .
 - El primer momento central siempre vale cero.
 - El segundo momento central se denota por $\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx$.
- El n -ésimo *momento normalizados* es el n -ésimo momento central dividido entre σ^n .
- Si $f(x)$ representa una función de densidad de probabilidad, entonces el primer momento es la media y el segundo momento central es la varianza de la distribución.

Duración y ancho de banda en términos de segundos momentos

- Una manera en que podemos definir la duración Δt y el ancho de banda $\Delta \omega$ de una señal $x(t)$, es tomando los segundos momentos centrales de la magnitud al cuadrado de $x(t)$ (resp. $X(\omega)$) dividida entre la energía de la señal:

$$\mu_t = \frac{1}{E} \int_{-\infty}^{\infty} t |x(t)|^2 dt, \quad \sigma_t^2 = \frac{1}{E} \int_{-\infty}^{\infty} (t - \mu_t)^2 |x(t)|^2 dt,$$

$$\mu_\omega = \frac{1}{2\pi E} \int_{-\infty}^{\infty} \omega |X(\omega)|^2 d\omega, \quad \sigma_\omega^2 = \frac{1}{2\pi E} \int_{-\infty}^{\infty} (\omega - \mu_\omega)^2 |X(\omega)|^2 d\omega,$$

donde

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega.$$

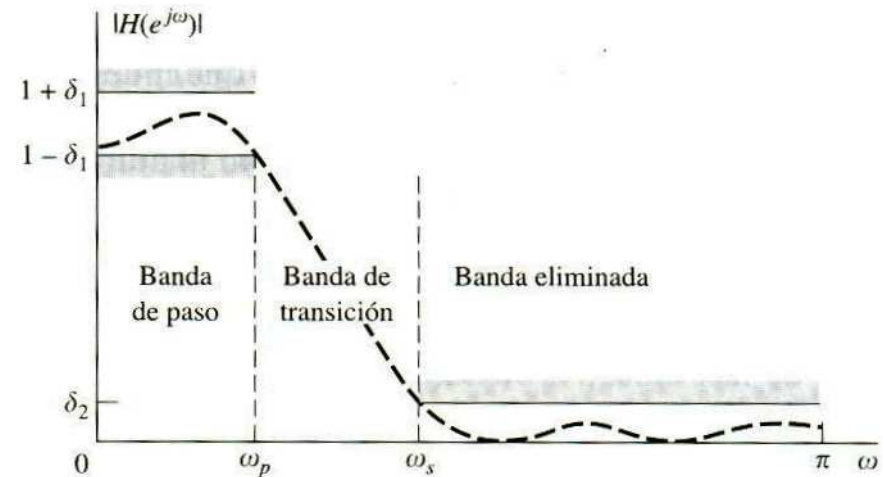
- En este caso, el principio de incertidumbre se establece como

$$\sigma_t \sigma_\omega \geq \frac{1}{2}.$$

- La gaussiana es la única señal para la cual se alcanza el mínimo $\sigma_t \sigma_\omega = 1/2$.

Consideraciones para el diseño de filtros

- Reducción del rizado en la banda de paso
- Reducción del rizado en la banda de rechazo
- Reducción del ancho de la banda de transición
- Filtros FIR: tamaño de kernel
- Filtros IIR: orden del filtro (número de polos)



Oppenheim et al.

Diseño de filtros FIR mediante enventanado

- Supongamos que la respuesta deseada de un filtro es $H_d(e^{j\omega})$. Esta se puede expresar como

$$H_d(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_d[n]e^{-j\omega n},$$

donde h_d es la respuesta al impulso del filtro.

- Ya que h_d puede ser de duración muy larga, o incluso infinita, una manera de obtener un filtro FIR, con una respuesta similar a la deseada, consiste en multiplicar h_d por una *función ventana* $w[n]$ de longitud finita:

$$h[n] = h_d[n]w[n].$$

- Aplicando la propiedad de modulación de la TF, tenemos que

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_d(e^{j\omega})W(e^{j(\omega-\theta)})d\theta.$$

Diseño de filtros FIR mediante enventanado

- Notar que si $w[n] = e^{j0n} = 1$ para todo n , entonces $H(e^{j\omega}) = H_d(e^{j\omega})$.
- Esto sugiere que si la energía de $w[n]$ se concentra alrededor de $\omega = 0$, entonces $H(e^{j\omega})$ será muy similar a $H_d(e^{j\omega})$.
- Sin embargo, por el principio de incertidumbre, a medida que $W(e^{j\omega})$ se aproxime a un impulso, la duración de $w[n]$ se incrementará en proporción inversa.

Algunas funciones de ventana comunes

Rectangular:
(truncamiento)

$$w[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq M, \\ 0, & \text{para otras } n. \end{cases}$$

Bartlett:
(triangular)

$$w[n] = \begin{cases} 2n/M, & 0 \leq n \leq M/2, \\ 2 - 2n/M, & M/2 \leq n \leq M, \\ 0, & \text{para otras } n. \end{cases}$$

Hanning:

$$w[n] = \begin{cases} 0.5 - 0.5 \cos(2\pi n/M), & 0 \leq n \leq M, \\ 0, & \text{para otras } n. \end{cases}$$

Hamming:

$$w[n] = \begin{cases} 0.54 - 0.46 \cos(2\pi n/M), & 0 \leq n \leq M, \\ 0, & \text{para otras } n. \end{cases}$$

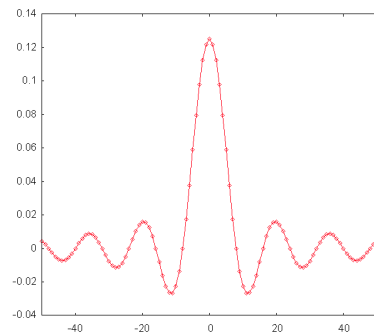
Blackman:

$$w[n] = \begin{cases} 0.42 - 0.5 \cos(2\pi n/M) + 0.08 \cos(4\pi n/M), & 0 \leq n \leq M, \\ 0, & \text{para otras } n. \end{cases}$$

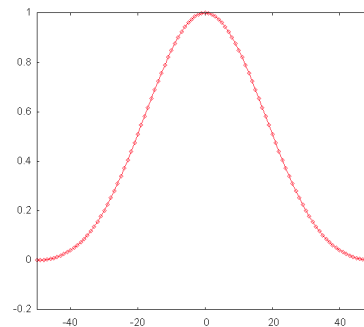
Ejemplo: Aproximación a un filtro ideal

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq \omega < \omega_c, \\ 0 & \text{para otros } \omega. \end{cases}$$

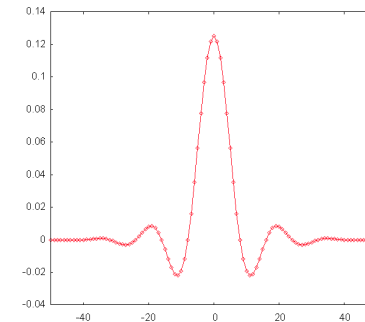
$$h[n] = \frac{\sin \omega_c n}{\pi n}.$$



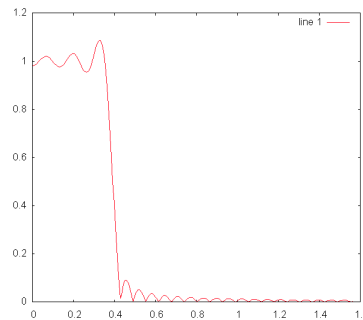
$h[n]$



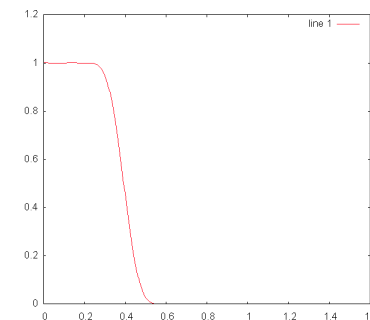
`blackman(length(h))`



`h.*blackman(length(h))`



← Respuesta en frecuencia →

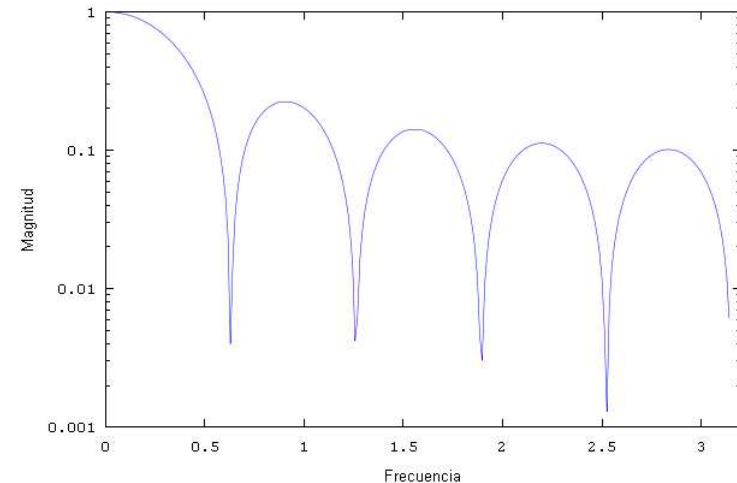


Análisis de error para una ventana rectangular

- La TF de una ventana rectangular $w[n]$ de tamaño M es

$$W(e^{j\omega}) = e^{-j\omega M/2} \frac{\sin[\omega(M+1)/2]}{\sin(\omega/2)}.$$

- La gráfica de magnitud de $W(e^{j\omega})$ consta de varios “lóbulos”.



- El lóbulo principal suaviza la respuesta en frecuencia del filtro, y por lo tanto su anchura influye en el ancho de la banda de transición.
- Los lóbulos laterales producen el efecto de Gibbs (rizado). La magnitud de estos lóbulos determina la profundidad de este efecto.
- Para la ventana rectangular, el ancho del lóbulo principal es $4\pi/(M+1)$, y la magnitud pico de los lóbulos laterales es aproximadamente 0.21 (-13 db).

Comparación entre ventanas

- La siguiente tabla muestra valores aproximados de anchura del lóbulo principal, y amplitud pico de los lóbulos laterales para distintos tipos de ventana de tamaño M :

Ventana	Ancho lóbulo principal	Amplitud lóbulos laterales
Rectangular	$4\pi/(M + 1)$	-13 db
Bartlett	$8\pi/M$	-25 db
Hanning	$8\pi/M$	-31 db
Hamming	$8\pi/M$	-41 db
Blackman	$12\pi/M$	-57 db

Oppenheim et al.

- Notar que existe un trueque entre la anchura del lóbulo principal y la amplitud de los lóbulos laterales, lo cual significa que no es posible minimizar de manera simultánea el ancho de la banda de transición y el rizado.
- Igualmente, el ancho del lóbulo principal es inversamente proporcional al tamaño de la ventana (el cual determina el tamaño del kernel del filtro que se desea diseñar).

Optimización de filtros FIR

- Supongamos que se desea obtener el filtro FIR $h[n]$ de tamaño M que mejor se aproxima al filtro deseado $h_d[n]$ de acuerdo a algún criterio de error.
- Un criterio razonable es minimizar el error cuadrático medio entre la respuesta en frecuencia de ambos filtros:

$$\min_{h[n]} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H_d(e^{j\omega}) - H(e^{j\omega})|^2 d\omega,$$

sin embargo, esto equivale a hacer $h[n] = w[n]h_d[n]$, donde $w[n]$ es una ventana rectangular.

Criterio minimax para filtros equiripple

- Otro criterio, conocido como *minimax*, consiste en minimizar el error máximo con respecto a la respuesta en frecuencia deseada:

$$\min_{h[n]} \left(\max_{\omega} |H_d(e^{j\omega}) - H(e^{j\omega})| \right).$$

- Este criterio ocasiona que se reduzcan los rizados de mayor amplitud, a costa de que aumente la amplitud de los rizados pequeños. En otras palabras, distribuye la energía del rizado a lo largo de todo el espectro de frecuencias.
- El filtro resultante tendrá un rizado uniforme, donde las crestas y valles tienen aproximadamente la misma amplitud, por lo que este tipo de diseño se llama *equiripple*.

Diseño de filtros pasa-bajas equiripple

- Consideremos inicialmente un filtro pasa-bajas $h_e[n]$ de tamaño M con fase cero, es decir, tal que $h_e[n] = h_e[-n] \in \mathbb{R}$.
- La respuesta en frecuencia $H_e(e^{j\omega})$ de este filtro está dada por

$$H_e(e^{j\omega}) = \sum_{n=-L}^L h_e[n] e^{-j\omega n} = h_e[0] + \sum_{n=1}^L 2h_e[n] \cos(\omega n),$$

donde $L = M/2$.

- Considerando que $\cos(\omega n)$ puede expresarse como $\cos(\omega n) = T_n(\omega)$, donde T_n es un polinomio de grado n , entonces podemos escribir $H_e(e^{j\omega})$ como

$$H_e(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^L a_k (\cos \omega)^k,$$

o bien,

$$H_e(e^{j\omega}) = P(\cos \omega), \quad P(x) = \sum_{k=0}^L a_k x^k.$$

Función de error

- Se define la función de error $E(\omega)$ como

$$E(\omega) = W(\omega)[H_d(e^{j\omega}) - H_e(e^{j\omega})],$$

donde $W(\omega)$ es una función de peso definida solamente para un número finito de subintervalos cerrados de $[0, \pi]$. Esta función permite utilizar un criterio distinto para las bandas de paso y rechazo.

- Para el filtro pasa-bajas, una función de peso adecuada es

$$W(\omega) = \begin{cases} \delta_2/\delta_1, & 0 \leq \omega \leq \omega_p, \\ 1, & \omega_r \leq \omega \leq \pi, \end{cases}$$

donde δ_1 y δ_2 son las amplitudes deseadas del rizado en las bandas de paso y rechazo, respectivamente, y ω_p y ω_r son los límites de la banda de transición (donde $W(\omega)$ no está definida).

- Entonces, el criterio minimax queda como

$$\min_{\{h_e[n]: 0 \leq n \leq L\}} \left(\max_{\omega} |E(\omega)| \right).$$

Teorema de alternación

- Sea F la unión disjunta de intervalos cerrados en $\mathbb{R}$. Sea $D(x)$ una función continua en F que se desea aproximar, $W(x)$ una función positiva continua en F , y $P(x)$ el polinomio de grado r dado por

$$P(x) = \sum_{k=0}^r a_k x^k.$$

- Se define el error ponderado como $E_p(x) = W(x)[D(x) - P(x)]$, y el error máximo como

$$E_{\max} = \max_{x \in F} |E_p(x)|.$$

- Para que exista un polinomio $P(x)$ único que minimize $E_{\max}$, es necesario que $E_p(x)$ presente al menos $r + 2$ alternancias; es decir, que existan $m \geq r + 2$ valores $x_1, \dots, x_m$ tales que

$$x_1 < x_2 < \dots < x_m, \quad \text{y} \quad E_p(x_k) = -E_p(x_{k+1}) = \pm E_{\max}$$

.

Método de Parks-McClellan

- De acuerdo al teorema de alternación, el filtro óptimo debe cumplir el sistema de ecuaciones dado por

$$W(\omega_i)[H_d(e^{j\omega_i}) - H_e(e^{j\omega_i})] = (-1)^{i+1}\delta, \quad i = 1, 2, \dots, (L+2),$$

donde ω_i son las frecuencias donde se presentan los extremos de la función de error (crestas y valles del rizado), y δ es el error óptimo.

- Es importante notar que los límites de la banda de transición forman parte del conjunto $\{\omega_i\}$; es decir, si $\omega_k = \omega_p$, entonces $\omega_{k+1} = \omega_r$.
- En otras palabras, dados los extremos ω_i de la función de error y haciendo $x_i = \cos(\omega_i)$ y $w_i = (-1)^{i+1}/W(\omega_i)$, podemos encontrar la respuesta en frecuencia $H_e(e^{j\omega})$ y el error δ óptimos resolviendo el sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^L & w_1 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^L & w_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{L+2} & x_{L+2}^2 & \dots & x_{L+2}^L & w_{L+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_d(e^{j\omega_1}) \\ H_d(e^{j\omega_2}) \\ \vdots \\ H_d(e^{j\omega_{L+2}}) \end{bmatrix}.$$

- Pero cuál es el conjunto $\{\omega_i\}$ óptimo?

Algoritmo Parks-McClellan

- Dados ω_p , ω_r , y $W(\omega)$, es posible aproximarse la configuración óptima de manera iterativa, mediante el siguiente algoritmo:
 1. Inicializar las frecuencias de los extremos $\{\omega_i\}$ con $\omega_k = \omega_p$ y $\omega_{k+1} = \omega_r$.
 2. Resolver el sistema $E(\omega_i) = (-1)^{i+1}\delta$, $i = 1, 2, \dots, (L+2)$ para obtener la respuesta $H_e(e^{j\omega})$ y el error δ óptimos.
 3. Calcular el error $E(\omega)$ (muestreando con alta densidad) para encontrar los nuevos extremos $\{\phi_i\}$; es decir, aquellos puntos donde $|E(\phi_i)| \geq \delta$. En caso de haber mas de $L + 2$ extremos, tomar los $L + 2$ extremos con mayor valor absoluto.
 4. Si no hay convergencia; es decir, si el conjunto $\{\phi_i\}$ no es suficientemente parecido a $\{\omega_i\}$, entonces regresar al paso 2 con $\omega_i = \phi_i$.
- Una vez obtenida la respuesta óptima $H_e(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^L a_k(\cos \omega)^k$, puede muestrearse en $\omega = 2\pi k/M$ y obtener $h_e[n]$ mediante la transformada inversa discreta de Fourier.

Diseño de filtros IIR

- Funciones en Octave para el análisis de filtros IIR:
 - `freqz(b, a)` - grafica la respuesta en frecuencia de un filtro IIR racional con coeficientes `b` y `a`.
 - `zplane(b, a)` - grafica el diagrama de polos y ceros para un filtro IIR racional donde `b` y `a` son los vectores renglón de coeficientes.
 - `zplane(z, p)` - grafica el diagrama de polos y ceros donde `z` y `p` son vectores columna que contienen, respectivamente, los ceros y los polos.

Filtros pasa-bajas de un polo

- Aplicaciones: encontrar tendencias en señales ruidosas, suavizamiento.
- Un polo en $z = p$, $0 < p < 1$:

$$H(z) = \frac{1}{z - p},$$

$$y[n] = py[n - 1] + x[n - 1].$$

- Un polo en $z = p$, $0 < p < 1$ y un cero en $z = 0$:

$$H(z) = \frac{z}{z - p},$$

$$y[n] = py[n - 1] + x[n].$$

- Un polo en $z = p$, $-1 < p < 1$ y un cero en $z = -1$:

$$H(z) = \frac{z + 1}{z - p},$$

$$y[n] = py[n - 1] + x[n] + x[n - 1].$$

Filtros pasa-altas de un polo

- Aplicaciones: eliminar tendencias (e.g. DC).
- Un polo en $z = p$, $-1 < p < 0$:

$$H(z) = \frac{1}{z - p},$$

$$y[n] = py[n - 1] + x[n - 1].$$

- Un polo en $z = p$, $-1 < p < 0$ y un cero en $z = 0$:

$$H(z) = \frac{z}{z - p},$$

$$y[n] = py[n - 1] + x[n].$$

- Un polo en $z = p$, $-1 < p < 1$ y un cero en $z = 1$:

$$H(z) = \frac{z - 1}{z - p},$$

$$y[n] = py[n - 1] + x[n] - x[n - 1].$$

Filtros pasa-banda

- Podemos obtener un filtro pasa-banda a partir de un pasa bajas (o pasa altas) mediante un corrimiento en frecuencia $\omega \longrightarrow (\omega - \omega_0)$.
- Si $z = re^{j\omega}$, entonces el corrimiento en frecuencia equivale a multiplicar z por $e^{-j\omega_0}$, es decir, rotar z por un ángulo $-\omega_0$.
- Equivalentemente, se pueden rotar los polos y ceros del sistema por un ángulo ω_0 , y agregar los correspondientes polos y ceros conjugados de manera que los coeficientes del sistema sean reales.

Ejemplo: filtros pasa-banda resonante

- **Ejemplo:** Tomemos el filtro pasa-bajas con función de transferencia $H_l(z)$ dada por

$$H_l(z) = \frac{1}{z - p},$$

el cual tiene un cero un polo en $z = p$.

- Entonces, para la construcción de un filtro pasa-banda entonado en la frecuencia ω_0 , podemos colocar dos polos en $z = pe^{j\omega_0}$ y $z = pe^{-j\omega_0}$, donde el ancho de banda es aproximadamente $\beta = 1 - p$.
- En algunos casos es deseable colocar ceros cerca de $z = \pm 1$ para eliminar la respuesta en $\omega = 0$ y $\omega = \pi$. En este caso, la función de transferencia queda como:

$$H_b(z) = \frac{(z - c)(z + c)}{(z - pe^{j\omega_0})(z - pe^{-j\omega_0})}.$$

Y la ecuación que describe el sistema es:

$$y[n] - (2p \cos \omega_0)y[n - 1] + p^2y[n - 2] = x[n] - c^2x[n - 2],$$

con $p = 1 - \beta$.

Filtros de ecualización tipo shelving

- Un filtro de ecualización se utiliza principalmente para compensar la respuesta en frecuencia de otro sistema, realzando o atenuando ciertas bandas de frecuencia.
- En particular, un filtro tipo *shelving*, realza o atenúa las frecuencias por abajo o por arriba de una frecuencia de corte.
- Estos filtros pueden implementarse como una generalización de los filtros pasa-bajas/altas de un polo y un cero, colocando el polo en $z = p$ y el cero en $z = q$, con lo cual se obtiene la siguiente respuesta:

$$H_s(z) = \frac{z - q}{z - p}.$$

donde p está relacionado con la frecuencia de corte, y $p-q$ con la ganancia en la banda $|\omega| < \omega_0$ (en el caso $p, q > 0$).

Filtros de ecualización tipo peaking

- Un filtro de ecualización tipo *peaking* permite realzar o atenuar una banda de frecuencias alrededor de una frecuencia central.
- Una manera de obtener este tipo de filtro, es convirtiendo el filtro shelving en un filtro pasa-banda. Esto se logra rotando el cero y el polo del filtro shelving, y agregando los pares conjugados correspondientes.
- De esta manera, la respuesta en frecuencia del filtro peaking queda como:

$$H_p(z) = \frac{(z - qe^{j\omega_0})(z - qe^{-j\omega_0})}{(z - pe^{j\omega_0})(z - pe^{-j\omega_0})},$$

donde

- ω_0 es aproximadamente la frecuencia central.
- $1 - p$ es aproximadamente el ancho de banda.
- $p - q$ está relacionado con la ganancia.