

NOTAS Y EJERCICIOS PARA EL CURSO: ÁLGEBRAS DE LIE.

G. SALGADO

ABSTRACT. Se presentan los conceptos básicos de álgebras de Lie

1. PRIMER RESUMEN

Denotaremos por $\mathbb{F}$ al campo de los números reales $\mathbb{R}$ o al campo de los números complejos $\mathbb{C}$. Sólo cuando sea necesario haremos la distinción correspondiente.

Una *multiplicación* en un espacio vectorial V es una función bilineal

$$\mu : V \times V \rightarrow V$$

Si un espacio vectorial V admite una multiplicación, entonces le llamaremos una *álgebra* y lo denotaremos con la letra $A = (V, \mu)$.

Si la multiplicación admite un elemento *neutro* (o *unidad*) i.e., un elemento, digamos e tal que:

$$\mu(e, u) = \mu(u, e) = e \quad \forall u \in A$$

diremos que la álgebra es *unitaria*.

Diremos que la álgebra (A, μ) es *asociativa* si μ es asociativa, i.e., si para todos $u, v, w \in V$ se tiene que:

$$\mu(u, \mu(v, w)) = \mu(\mu(u, v), w).$$

Por último, diremos que la álgebra A es *abeliana* si la multiplicación es conmutativa, i.e., si para todos $u, v \in V$ se tiene que:

$$\mu(u, v) = \mu(v, u).$$

Ejemplos

1) Sea V es espacio vectorial formado por los polinomios en la variable x y con coeficientes en $\mathbb{F}$. Podemos definir la multiplicación usual de polinomios:

$$\mu(p(x), q(x)) := p(x)q(x)$$

Key words and phrases. Algebra de Lie, subálgebra, ideal, morfismo, representación.

y verificar que (V, μ) es una álgebra asociativa, abeliana y unitaria, donde en este caso, el elemento unidad está definido por el polinomio constante igual a 1.

2) Sea V el espacio vectorial formado con todas la matrices de $n \times n$ y con coeficientes en $\mathbb{F}$, de nuevo, la multiplicación usual de matrices permite dotar a V con estructura de álgebra asociativa unitaria pero ahora no es abeliana. En este caso el elemento unidad esta dado por la matriz identidad de $n \times n$.

3) Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$, entonces $\text{End}(V)$ admite tambien estructura de espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$. Más aún, la composición de transformaciones lineales permite definir una multiplicación en $\text{End}(V)$ que lo dota con estructura de álgebra asociativa con unidad, (la unidad es la transformación lineal identidad en V). Este también es un ejemplo de algebra no abeliana.

4) Sea $V = \mathbb{F}^3$ y definamos $\mu(u, v) = u \times v$ (el producto cruz de dos vectores), es fácil verificar que μ es una multipliación no abeliana, de hecho, la multiplicación es antisimétrica, i.e., $u \times v = -v \times u$, esta multipliación no es asociativa, ¿Hay un elemento neutro?

1.1. Definición Sea V un $\mathbb{F}$ espacio vectorial, diremos que V admite una estructura de *álgebra de Lie* si V admite una función bilineal, la cual denotaremos por $[\cdot, \cdot] : V \times V \rightarrow V$ y tal que satisface:

- (1) $[x, y] = -[y, x]$
- (2) $[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0$

para todos $x, y, z \in V$.

Una *álgebra de Lie* es un espacio vectorial que admite una estructura de álgebra de Lie.

De aquí en adelante $\mathfrak{g}$ denotará una álgebra de Lie.

1.2. Notas

1. La ecuación (1) de la definición anterior es equivalente a pedir que $[x, x] = 0$ para todo $x \in V$.
2. La ecuación (2) se conoce como la *Identidad de Jacobi*.
3. Claramente $[x, y] = 0$ para todos $x, y \in V$, define una estructura de álgebra de Lie en V . Por lo que todo espacio vectorial admite al menos una estructura de álgebra de Lie.

1.3. Ejemplos

1. Sea $V = \mathbb{F}^n$, definamos $[u, v] = 0$ para todos $x, y \in \mathbb{F}^n$, entonces a $(\mathbb{F}^n, [\cdot, \cdot])$ le llamaremos la álgebra de Lie *abeliana* de dimensión n .
2. Sea $V = \mathbb{R}^3$, para $u, v \in \mathbb{R}^3$ definimos

$$[u, v] = u \times v$$

esto es, el corchete de dos vectores en $\mathbb{R}^3$ esta dado por el producto cruz usual. Entonces $(\mathbb{R}^3, [\cdot, \cdot])$ es una álgebra de Lie.

3. Sea $V = \text{Mat}(n, \mathbb{F})$ el conjunto de matrices de $n \times n$ con entradas en el campo $\mathbb{F}$, podemos definir una estructura de álgebra de Lie en $\text{Mat}(n, \mathbb{F})$ de la siguiente forma:

$$[A, B] = AB - BA$$

Como $\text{Mat}(n, \mathbb{F})$ es espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$, entonces $(\text{Mat}(n, \mathbb{F}), [\cdot, \cdot])$ es una álgebra de Lie a la cuál denotaremos por $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{F})$.

4. Sea ahora V un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$, denotaremos por $\text{End}_{\mathbb{F}}(V)$ al conjunto de todas las transformaciones lineales de V en V . Es fácil verificar que si definimos

$$[T, S] = T \circ S - S \circ T$$

entonces $\text{End}_{\mathbb{F}}(V)$ se convierte en una álgebra de Lie, a la cuál denotaremos por $\mathfrak{gl}(V)$.

5. Sea ahora A una álgebra asociativa, y digamos que la multiplicación es $\mu : A \times A \rightarrow A$, entonces de *manera natural* podemos definir una estructura de álgebra de lie en A definiendo

$$[a, b] = \mu(a, b) - \mu(b, a)$$

6. Consideremos ahora $V = \mathbb{R}^2 = \{ ae_1 + be_2 \mid a, b \in \mathbb{R} \}$ donde e_1, e_2 es la base usual de $\mathbb{R}^2$, para definir un corchete de Lie en $\mathbb{R}^2$ basta con definirlo en los pares $e_1 \times e_1, e_1 \times e_2, e_2 \times e_1$ y $e_2 \times e_2$ ya que podemos *extenderlo linealmente* en cada entrada, así que proponemos:

$$[e_1, e_1] = [e_2, e_2] = 0 \quad \text{y} \quad [e_1, e_2] := -[e_2, e_1] := ae_1 + be_2$$

Notar que las definiciones de $[e_1, e_1]$ y $[e_2, e_2]$ están *forzadas* por la anti-simetría del corchete de Lie y que por tanto el corchete (de Lie) en $\mathbb{R}^2$ queda completamente definido por los valores de a y b .

Esta última afirmación se sigue del hecho de que la Identidad de Jacobi se *satisface trivialmente* para esta definición, esto es, la Identidad de Jacobi *no impone* restricciones sobre los posibles valores de a y b .

1.4. Notas

1. Es claro que los ejemplos 3. y 4. anteriores son casos particulares de la construcción del ejemplo 5.
2. Si V es de dimensión finita, digamos n , es de esperarse que exista una relación entre $\mathfrak{gl}(V)$ y $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{F})$ la cual aclararemos más adelante.
3. Del ejemplo 6. se sigue que para cada valor de a y b hay una estructura de álgebra de Lie en $\mathbb{R}^2$ y es claro que son todas las posibles en $\mathbb{R}^2$. Más adelante veremos que en realidad sólo hay dos posibles *clases de equivalencia* en este conjunto y elegiremos a los representantes como

$$(0, 0) \quad \text{y} \quad (0, 1)$$

los cuales representaran a la álgebra de Lie abeliana de dimensión dos y a la álgebra afín de dimensión dos respectivamente.

1.5. Definición Sea $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie, y sea $\mathfrak{h}$ un subespacio vectorial, diremos $\mathfrak{h}$ que es una *subálgebra* de Lie (de $\mathfrak{g}$) si $[\cdot, \cdot]_{\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}} : \mathfrak{h} \times \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h}$. O en otras palabras si $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$. Si el subespacio vectorial $\mathfrak{h}$ satisface que $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{h}$, entonces decimos que $\mathfrak{h}$ es un *ideal* de $\mathfrak{g}$.

Es claro de la definición que si $\mathfrak{h}$ es un ideal entonces $\mathfrak{h}$ es una subálgebra.

1.6. Definición Sea $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie, el *centro* de $\mathfrak{g}$ es por definición el siguiente conjunto

$$Z(\mathfrak{g}) = \{ x \in \mathfrak{g} \mid [x, y] = 0 \ \forall y \in \mathfrak{g} \}$$

1.7. Ejemplos

1. De la definición es claro que $Z(\mathfrak{g})$ es un ideal en $\mathfrak{g}$.
2. En $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{F})$ consideremos el subespacio generado por todas aquellas matrices que tienen traza cero, el cual denotaremos por $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{F})$. Entonces resulta que $[\mathfrak{gl}(n, \mathbb{F}), \mathfrak{sl}(n, \mathbb{F})] \subset \mathfrak{sl}(n, \mathbb{F})$ y por tanto $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{F})$ es ideal y subálgebra de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{F})$.
3. En $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{F})$ consideremos el subespacio vectorial generado por la matriz identidad de $n \times n$, la cual denotaremos por I_n , a dicho subespacio lo denotaremos por $\langle I_n \rangle$. Entonces $\langle I_n \rangle$ es un ideal de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{F})$ y por tanto subálgebra.
4. Verifique el lector que $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{F})$ no contiene ideales propios distintos del subespacio cero y el total.
5. Verifique que si $\mathfrak{g}$ es una álgebra de Lie, entonces

$$\mathfrak{g}^{(1)} := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \dots, \mathfrak{g}^{(n+1)} := [\mathfrak{g}^{(n)}, \mathfrak{g}^{(n)}], \dots$$

son ideales que además satisfacen que

$$\mathfrak{g}^{(1)} \supset \mathfrak{g}^{(2)} \supset \dots \supset \mathfrak{g}^{(n)} \supset \dots$$

1.8. Nota

1. Notar que al menos como espacio vectorial tenemos la siguiente igualdad:

$$\mathfrak{gl}(n, \mathbb{F}) = \langle I_n \rangle \oplus \mathfrak{sl}(n, \mathbb{F})$$

1.9. Por el ejemplo 6. de **1.3.** es claro que basta definir el corchete en los elementos básicos de $\mathfrak{g}$ para que quede completamente determinado. De hecho supongamos que $\mathfrak{g}$ es una álgebra de Lie de dimensión finita igual a n , con corchete $[\cdot, \cdot]$ y sean $e_1, e_2, \dots, e_n$ una base de $\mathfrak{g}$, entonces existen escalares C_{ij}^k tal que

$$[e_i, e_j] = \sum_k C_{ij}^k e_k$$

a dichas ecuaciones les llamaremos las *ecuaciones de estructura* de $\mathfrak{g}$ y a los coeficientes C_{ij}^k les llamaremos las *constantes de estructura* de la álgebra de Lie $\mathfrak{g}$.

Es claro que el conjunto de constantes C_{ij}^k definen una álgebra de Lie, si y sólo si

$$C_{ij}^k = -C_{ji}^k \quad \text{y} \quad C_{ij}^s C_{sk}^m + C_{ki}^s C_{sj}^m + C_{jk}^s C_{si}^m = 0$$

2. COMO CONSTRUIR ÁLGEBRAS DE LIE

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$ de dimensión finita. Sea Φ una forma bilineal en V , i.e., $\Phi : V \times V \rightarrow \mathbb{F}$.

Definamos

$$\mathfrak{gl}(V) \supset \mathfrak{g}(\Phi) = \{A \in \mathfrak{gl}(V) \mid \Phi(Ax, y) + \Phi(x, Ay) = 0\}$$

(la condición que define a $\mathfrak{g}(\Phi)$ se conoce como *condición de invariancia*). Obtenemos que $\mathfrak{g}(\Phi)$ es una subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(V)$.

Más aún, si pensamos en la representación matricial de Φ , y (abusando de la notación) escribimos $\Phi(x, y) = x^T \Phi y$ entonces la condición de invariancia es equivalente a:

$$A^T \Phi + \Phi A = 0$$

Ejemplificaremos lo anterior, suponiendo que $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ y que Φ es simétrica y no degenerada.

Bajo estas hipótesis obtenemos que la forma canónica de Φ esta dada por

$$\Phi = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}$$

donde $p + q = n$, en este caso lo usual es denotar $\mathfrak{g}(\Phi)$ por $\mathfrak{o}(p, q)$ y llamarla la álgebra de Lie *seudoortogonal real*.

Si ahora escribimos a A en bloques de la siguiente forma:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$$

la ecuación (3) se satisface si y sólo si

$$A_1^T + A_1 = 0, \quad A_2^T = A_3 \quad A_4^T + A_4 = 0$$

por lo que en realidad

$$A \in \mathfrak{o}(p, q) \quad \text{si y sólo si} \quad A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_2^T & A_4 \end{pmatrix}$$

con A_1 y A_4 matrices antisimétricas, por lo que

$$\dim(\mathfrak{o}(p, q)) = \frac{p(p-1)}{2} + \frac{q(q-1)}{2} + pq$$

Si Φ es *definida positiva*, i.e., $p = n$ y $q = 0$, entonces la álgebra de Lie se denota por $\mathfrak{o}_n$ y se llama la álgebra de Lie *ortogonal*. En este caso la forma canónica de Φ esta dada por I_n , así que la condición de invariancia es equivalente a:

$$A + A^T = 0$$

o lo que es lo mismo $A \in \mathfrak{o}_n$ si y sólo si A es antisimétrica.

3. MORFISMOS Y REPRESENTACIONES DE ÁLGEBRAS DE LIE

Ahora estamos interesados en las funciones entre dos álgebras de Lie que *preserven* dicha estructura.

3.1. Definición Sean $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$ dos álgebras de Lie, un *morfismo* (de álgebras de Lie) es una transformación lineal $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ tal que

$$\phi([x, y]_{\mathfrak{g}}) = [\phi(x), \phi(y)]_{\mathfrak{h}}$$

Si además resulta que $\mathfrak{h} = \mathfrak{gl}(V)$ para algún espacio vectorial V , entonces decimos que ϕ es una *representación lineal* de $\mathfrak{g}$ en V .

3.2. Nota

1. Si ϕ es una representación de $\mathfrak{g}$ en V , entonces

$$[\phi(x), \phi(y)] = \phi(x) \circ \phi(y) - \phi(y) \circ \phi(x)$$

3.3. Definición Decimos que $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ es un *isomorfismo* (de álgebras de Lie) si ϕ es un isomorfismo de espacios vectoriales de $\mathfrak{g}$ a $\mathfrak{h}$ que además es morfismo de álgebras de Lie.

NOTA Claramente esta definición se puede reescribir en terminos de las constantes de estructura de la siguiente forma, supongamos que $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ es un isomorfismo de álgebras de Lie y fijemos bases $\{e_i\}$ y $\{f_j\}$ para $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$ respectivamente, si escribimos $\phi(e_i) = \sum_k \phi_{ki} f_k$ entonces se debe satisfacer que:

$$\phi_{ks} C_{ij}^s = \hat{C}_{pq}^k \phi_{pi} \phi_{qj}$$

donde C_{ij}^s y $\hat{C}_{pq}^k$ son las constantes de estructura para $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$ respectivamente.

3.4. Ejemplos

1. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$ y supongamos que $\dim_{\mathbb{F}}(V) = n$. Fijemos una base de V . Entonces a cada $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$ le podemos asociar una matriz de $n \times n$, digamos A_T . Definamos entonces:

$$\begin{aligned}\phi : \mathfrak{gl}(V) &\rightarrow \mathfrak{gl}(n, \mathbb{F}) \\ T &\mapsto A_T\end{aligned}$$

Tenemos entonces que ϕ es un isomorfismo de álgebras de Lie. Y de hecho es una representación de $\mathfrak{gl}(V)$ en $\mathbb{F}^n$.

2. Sea $V = \mathfrak{g}$ y definamos

$$\begin{aligned}\text{ad} : \mathfrak{g} &\rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \\ x &\mapsto \text{ad}(x) \quad (y \mapsto [x, y])\end{aligned}$$

ad es la representación *adjunta*. Verifique el lector que el hecho de que ad es una representación es equivalente a la Identidad de Jacobi.

3. Sea $V = \text{Span}\{H, E, F\}$ como espacio vectorial. Definamos un corchete de Lie en V definiendo:

$$[H, E]_V = 2E \quad [H, F]_V = -2F \quad [E, F]_V = H$$

y extendiendo linealmente en cada entrada. Veamos que podemos definir un *isomorfismo* entre esta álgebra de Lie y $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{F})$. Para esto basta definir

$$\phi : (V, [,]_V) \rightarrow \mathfrak{sl}(2, \mathbb{F}) \subset \mathfrak{gl}(2, \mathbb{F})$$

como

$$H \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad E \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad F \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y extender linealmente. Notar que de hecho ϕ es una *representación* de V en $\mathbb{R}^2$.

4. Más aún, podemos definir una representación de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{F})$ en $\mathbb{R}^n$ para toda $n \geq 2$, por ejemplo para $n = 3$, basta definir $\phi : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{F}) \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathbb{F}^3) \simeq \mathfrak{gl}(3, \mathbb{F})$ como

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4. TAREA 1

1. Demostrar que el subconjunto $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{F}) \subset \mathfrak{gl}_n(\mathbb{F})$ de matrices de traza igual a cero es una subálgebra de Lie. Investigar la estructura de las matrices de las siguientes álgebras de Lie.

- (1) $\mathfrak{so}_n(\mathbb{C}) = \mathfrak{o}_n(\mathbb{C}) \cap \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$
- (2) $\mathfrak{so}(p, q) = \mathfrak{o}(p, q) \cap \mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$

2. Determinar la estructura de las matrices de las siguientes álgebras de Lie $\mathfrak{g}(\Phi)$, donde:

- (1) $\Phi(x, y)$ es una forma hermitica simétrica no degenerada de signature (p, q) . (álgebra $\mathfrak{u}(p, q)$)
- (2) $\Phi(x, y)$ es una forma hermitica simétrica. (álgebra $\mathfrak{u}_n$).
- (3) $\mathfrak{su}(p, q) = \mathfrak{u}(p, q) \cap \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$.
- (4) $\Phi(x, y)$ es una forma hermitica antisimétrica no degenerada. (álgebra $\mathfrak{sp}(m)$, $2m = \dim_F(V)$).
- (5) $\mathfrak{sp}(m) = \mathfrak{sp}_m(\mathbb{C}) \cap \mathfrak{su}_{2m}$

3. Demostrar que dos álgebras de Lie son isomorfas si y sólo si se pueden encontrar bases en las cuales las constantes de estructura de las álgebras en cuestión coinciden.

4. Demostrar que toda álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de dimensión dos es isomorfa a la álgebra de Lie abeliana de dimensión dos o a la álgebra de Lie definida por $[e_1, e_2] = e_2$.

5. Demostrar que las siguientes álgebras de Lie son isomorfas:

- (1) $\mathfrak{so}_5(\mathbb{R}) \simeq \mathfrak{sp}_2$
- (2) $\mathfrak{so}(3, 2) \simeq \mathfrak{so}_2(\mathbb{R})$
- (3) $\mathfrak{su}_2 \simeq \mathfrak{so}_3(\mathbb{R}) \simeq \mathfrak{sp}_1$
- (4) $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) \simeq \mathfrak{su}(1, 1) \simeq \mathfrak{so}(2, 1) \simeq \mathfrak{sp}_1(\mathbb{R})$.

6. Demostrar que la aplicación

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & b-c & -i(b+c) \\ c-b & 0 & 2ia \\ i(b+c) & -2ia & 0 \end{pmatrix} \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}$$

define un isomorfismo entre $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ y $\mathfrak{so}_3(\mathbb{C})$.

7. Determinar si los siguientes conjuntos forman una álgebra de Lie si se define el corchete como $[A, B] = AB - BA$,

- (1) Todas las matrices simétricas de $n \times n$.
- (2) Todas las matrices antisimétricas de $n \times n$.
- (3) Todas la matrices invertibles de $n \times n$.

8. Hallar las ecuaciones estructurales del álgebra $\mathfrak{so}_n(\mathbb{R})$ de matrices anti-simétricas en la base $e_{ij} := E_{ij} - E_{ji}$ donde $i < j$ y E_{ij} es la matriz cuadrada de $n \times n$ tal que tiene cero en todas las entradas distintas de la ij y la entrada ij es uno.

9. Demostrar que las siguientes matrices

$$\begin{pmatrix} A & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{F}), x \in \mathbb{F}^n$$

forman una álgebra de Lie. Determine quien es el conmutador.

10. Demostrar que las siguientes matrices

$$\begin{pmatrix} A & \lambda x \\ x^T & 0 \end{pmatrix} \quad A^T = -A, x \in \mathbb{R}^n \quad \text{y} \quad \lambda \in \mathbb{R}^*$$

forman una álgebra de Lie.

11. Demostrar que en toda álgebra de Lie de dimensión dos la Identidad de Jacobi se satisface trivialmente.

12. Comprobar que

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

es una base de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$, Determine sus ecuaciones estructurales y las constantes de estructura.

13. Demostrar que las matrices

$$e_1 = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

forman una base de la álgebra de Lie $\mathfrak{su}_2$. Halle sus ecuaciones estructurales.

14. Halle las ecuaciones estructurales de $\mathfrak{su}_2$ en la base

$$e_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Demuestre que esta álgebra es isomorfa a la álgebra de Lie de los cuaterniones puros:

$$q = x_1 \hat{i} + x_2 \hat{j} + x_3 \hat{k}$$

15. Demostrar que

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

es una base de $\mathfrak{su}(1,1)$. Halle las ecuaciones estructurales y las constantes de estructura.

16. Sea V un espacio vectorial y suponga que $\dim_{\mathbb{F}}(V) = 7$. Sea $\{e_1, \dots, e_7\}$ una base. Definamos

$$[e_i, e_j] = a_{ij}e_{i+j} \quad \text{donde} \quad i+j \leq 7$$

y $a_{ij} = -a_{ji}$. ¿Que condiciones hay que imponer a los a_{ij} para que V sea álgebra de Lie?

17. Sea A una álgebra asociativa con ley de multiplicación μ . Definamos $[a, b]_\mu = \mu(a, b) - \mu(b, a)$. Demostrar que $(A, [,]_\mu)$ es una álgebra de Lie.
18. Sea A la álgebra asociativa de las matrices de $n \times n$ con la multiplicación usual. Aplique el ejercicio 17 y diga que álgebra de Lie resulta.
19. Sea A una álgebra asociativa y suponga que la multiplicación es conmutativa. Aplique de nuevo el ejercicio 17 y reconozca la álgebra de Lie resultante.
20. Sean $\mathfrak{h}$ y $\mathfrak{m}$ dos subespacios vectoriales de la álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Demuestre que:

$$[\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] = [\mathfrak{m}, \mathfrak{h}] \quad \text{y que} \quad [\mathfrak{g}, [\mathfrak{h}, \mathfrak{m}]] \subset [\mathfrak{h}, [\mathfrak{m}, \mathfrak{g}]] + [\mathfrak{m}, [\mathfrak{g}, \mathfrak{h}]]$$

21. Demostrar que los siguientes subconjuntos de matrices de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{F})$ son también subálgebras:
- (1) el subconjunto $\mathfrak{t}(n, \mathbb{F})$ de matrices triangulares superiores.
 - (2) el subconjunto $\mathfrak{t}_0(n, \mathbb{F})$ de matrices estrictamente triangulares superiores, i.e., $A \in \mathfrak{t}_0(n, \mathbb{F})$ si $A_{ij} = 0$ para $j \leq i$
22. Demostrar que en $\mathbb{R}^3$ con el corchete definido por $[u, v] = u \times v$ no hay subálgebras de Lie de dimensión dos.
23. Demostrar que las matrices de la forma:

$$U = \begin{pmatrix} U_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & U_m \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad U_i = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda_i \\ \lambda_i & 0 \end{pmatrix}$$

forman una subálgebra de Lie de $\mathfrak{o}_{2m}$.

24. La álgebra *derivada* de $\mathfrak{g}$ es por definición el subespacio lineal generado por los elementos $[x, y]$ con $x, y \in \mathfrak{g}$, y se denota por $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Demuestre que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ es un ideal en $\mathfrak{g}$.
25. Sean $\mathfrak{h}$ y $\mathfrak{t}$ dos ideales en $\mathfrak{g}$. Demuestre que $[\mathfrak{h}, \mathfrak{t}]$ y $\mathfrak{h} + \mathfrak{t}$ son ideales en $\mathfrak{g}$. ¿Qué puede decir de $\mathfrak{h} \cup \mathfrak{t}$ y $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{t}$?
26. Suponga que $B : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{F}$ es una forma bilineal que satisface:

$$B([x, y], z) = B(x, [y, z]) \quad \forall x, y, z \in \mathfrak{g}$$

demuestre que $\mathfrak{h}_L = \{ x \in \mathfrak{g} \mid B(x, y) = 0 \quad \forall y \in \mathfrak{g} \}$ y $\mathfrak{h}_R = \{ x \in \mathfrak{g} \mid B(y, x) = 0 \quad \forall y \in \mathfrak{g} \}$ son ideales de $\mathfrak{g}$. ¿Hay alguna relación entre $\mathfrak{h}_L$ y $\mathfrak{h}_R$. ¿Qué pasa si B es simétrica? ¿antisimétrica?

27. Demuestre que en la álgebra de Lie de dimensión tres definida por

$$[e_1, e_2] = 0 \quad [e_1, e_3] = e_1 \quad [e_2, e_3] = e_2$$

el subespacio generado por $\{ e_1, e_3 \}$ es una subálgebra. ¿Será un ideal? ¿Tiene esta álgebra ideales?

28. Demostrar que las siguientes matrices de 3×3 dadas por

$$U = \begin{pmatrix} a & b & p \\ c & -a & q \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

forman una álgebra de Lie. Más aún, las ecuaciones $p = q = 0$ determinan una subálgebra y las ecuaciones $a = b = c = 0$ un ideal.

29. Hallar los ideales y el centro de $\mathfrak{t}_0(3, \mathbb{R})$.

30. Sea A una álgebra cualquiera. Una *derivación* en A es una transformación lineal $D : A \rightarrow A$ tal que

$$D(ab) = D(a)b + aD(b)$$

Demuestre que el conjunto de todas las derivaciones en A forman una álgebra de Lie si definimos el corchete como

$$[D_1, D_2] = D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1$$

31. Sea $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie sobre el campo $\mathbb{F}$ y sea D una derivación en $\mathfrak{g}$. Demuestre que $\mathfrak{g} \oplus \mathbb{F}$ con el corchete definido por

$$[(x, \lambda), (y, \mu)] := ([x, y] + \lambda D(y) - \mu D(x), 0)$$

es una álgebra de Lie para la cual $\mathfrak{g}$ es un ideal.