Materiales para la asignatura de Análisis I

Profesor: José Antonio Vallejo Rodríguez
Facultad de Ciencias UASLP
e-mail:jvallejo@fciencias.uaslp.mx

Semestre V Curso $2008 - 09$

Temario de la asignatura

TEMA I: Repaso de cálculo diferencial

1.1 Repaso de topología y cálculo diferencial en espacios normados. 1.2 Sistema de coordenadas lineales asociadas a una base. Derivadas direccionales y diferencial. 1.3 Transformaciones regulares y difeomorfismos. 1.4 El álgebra $\mathcal{O}(U)$.

TEMA II: El espacio tangente

2.1 Estructura diferenciable de los abiertos $U \subset \mathbb{R}^n$. 2.2 Curvas diferenciales y vectores tangentes. 2.3 Espacio vectorial tangente en un punto. 2.4 Campos vectoriales sobre un abierto.

TEMA III: Campos vectoriales

3.1 Campos vectoriales y derivaciones del álgebra $\mathcal{O}(U)$. 3.2 Campos básicos. 3.3 El álgebra de Lie $\mathcal{X}(U)$.

TEMA IV: Flujos y grupos uniparamétricos

4.1 Curvas integrales de campos de vectores. 4.2 Flujo asociado a un campo. 4.3 Grupo uniparamétrico de transformaciones asociado a un campo.

TEMA V: El espacio cotangente

5.1 Espacio cotangente en un punto. 5.2 Sistemas de coordenadas en un punto. 5.3 Sistemas de coordenadas locales.

TEMA VI: Formas diferenciales

6.1 Pullback de diferenciales en un punto. 6.2 Inmersiones y submersiones. Embebimientos. 6.3 $1-$formas diferenciales. 6.4 El espacio $\Omega^1(U)$.

TEMA VII: Automorfismos diferenciales

7.1 Automorfismos diferenciables. 7.2 Acción de los automorfismos sobre $\mathcal{O}(U)$, $\mathcal{X}(U)$ y $\Omega^1(U)$. Funciones, campos y formas invariantes.

TEMA VIII: Derivada de Lie

8.1 Grupos uniparamétricos de automorfismos. 8.2 Generador infinitesimal. 8.3 Derivada de Lie $\mathcal{L}_X$: acción sobre $\mathcal{O}(U)$, $\mathcal{X}(U)$ y $\Omega^1(U)$.

TEMA IX: Clasificación de campos vectoriales

9.1 Ecuaciones diferenciales ordinarias en $U \subset \mathbb{R}^n$. 9.2 Teorema fundamental de la equivalencia diferenciable de campos regulares. 9.3 Método de las características.

TEMA X: Simetrías de ecuaciones diferenciales

10.1 Campos $\pi-$proyectables. El anillo de las integrales primeras. 10.2 Ecuaciones diferenciales $\pi-$proyectables e invariantes por un campo vectorial. Simetrías de una ecuación. 10.3 Integración elemental mediante simetrías.

TEMA XI: Variedades diferenciales

11.1 Cartas y atlas. Compatibilidad de atlas. Atlas maximales. 11.2 Estructuras diferenciales sobre un conjunto. Variedades diferenciales. Ejemplos. 11.3 La topología de una variedad diferencial. Variedades Hausdorff y 2AN. Paracompacidad y particiones de la unidad. 11.4 Funciones diferenciables sobre una variedad. 11.5 Grupos de Lie.

Descripción del curso

El curso consiste en una introducción a las técnicas modernas del Análisis Matemático en un contexto local (es decir, sobre abiertos de un espacio normado). La idea es que el estudiante se familiarice con ellas antes de ver cómo se aplican en espacios que no tienen una estructura lineal global, como esferas, toros, etc.

En el primer tema se repasarán los conceptos más importantes del cálculo diferencial en espacios normados, especialmente en $\mathbb{R}^n$, hasta llegar a la introdución del álgebra de gérmenes de funciones diferenciables $\mathcal{O}(U)$. A partir de entonces, todo el curso girará en torno a la idea central de que la estructura algebraica de $\mathcal{O}(U)$ y las distintas álgebras asociadas a ella (como $\mathrm{End}(\mathcal{O}(U))$, su dual, etc.) nos proporcionarán toda la información que necesitemos para construir el cálculo diferencial sobre U. Como un primer ejemplo, veremos que hay una correspondencia biunívoca entre los campos vectoriales $\mathcal{C}^\infty$ y las derivaciones del álgebra $\mathcal{O}(U)$, lo que nos conducirá de modo natural a introducir las $1-$formas direfenciales como los elementos del dual $\mathrm{Der}^*\mathcal{O}(U)$. Otro tema importante incide en la relación existente entre estos espacios y el grupo de automorfismos asociado a un campo vectorial a través de su flujo integral. Resulta que este grupo actúa (en sentido algebraico) sobre todas las álgebras construídas a partir de $\mathcal{O}(U)$, y esa acción (o mejor dicho, sus invariantes) nos proporcionará una información valiosísima sobre la estructura local del campo, lo cual se refleja en su sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden asociado. Ésta es la idea del método de las transformaciones de Lie para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden (o, equivalentemente, ecuaciones diferenciales de orden superior), y la herramienta básica en este proceso será la derivada de Lie respecto de un campo vectorial. Veremos como aplicar estas técnicas para determinar las simetrías de un sistema de EDOs, y como utilizar las integrales primeras asociadas a estas simetrías para integrar el sistema.

De hecho, un aspecto muy interesante de esta teoría es que permite comprender de dónde salen todas las "fórmulas de integración" que se ven en los cursos usuales de ecuaciones diferenciales. Por otra parte, demostraremos un teorema fundamental que establece la equivalencia diferenciable de todos los campos (y consecuentemente, de todos los sistemas dinámicos) regulares sobre un abierto. El corolario obvio de este resultado es que los sistemas dinámicos regulares están completamente clasificados y, hasta cierto punto, carecen de interés. Esto abre la puerta a un estudio de la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciables, dinámica caótica, etc.

El último tema tiene un carácter especial, y consiste en una introducción a las variedades diferenciales con vistas a un estudio de la Geometría Diferencial global en una asignatura posterior. Se trata de un tema *opcional*, y sólo se impartirá si el desarrollo temporal de la asignatura lo permite.

Una parte muy importante del curso la constituyen las tareas semanales. El objetivo de las mismas es que el estudiante definitivamente comience a madurar (en sentido matemático), se acostumbre a utilizar el lenguaje abstracto de las matemáticas y enuncie sus razonamientos en este lenguaje. No se trata, pues, únicamente de comprobar que se sabe hacer las cuentas, sino que también se sabe cómo expresar los resultados adecuadamente, con rigor y precisión. En este sentido, es fundamental recalcar que en la evaluación de las tareas pesará tanto el hecho de que los resultados sean correctos como el que estén expresados con claridad y demostrando una comprensión suficiente del formalismo matemático.

Por último, unas palabras sobre los prerrequisitos del curso. Se supone que el estudiante ha llevado un buen curso de cálculo diferencial de varias variables y un buen curso de álgebra lineal (¡y que los tiene aprobados!). Se repasarán los conceptos necesarios en el transcurso de las clases, pero estos repasos no constituirán un sustituto de lo que se debió haber visto en las asignaturas de Álgebra Lineal y Cálculo III y IV. Cierta familiaridad con los conceptos básicos de Física (ecuaciones de Newton, momento lineal y angular, etc.), al nivel de las asignaturas de Física que se imparten en el tronco común es deseable, pero no imprescindible.

Referencias

Realmente no hay ningún texto que se adecúe por completo a los contenidos del curso. El material básico que se supone conocido por el estudiante (el cálculo diferencial de varias variables) está bien cubierto por las referencias [1]-[4]. Los tópicos más avanzados están desde luego contenidos en [5]-[7] aunque con una perspectiva algo diferente a la que seguiremos durante el curso. Estos libros tratan con variedades diferenciales, en tanto que nosotros nos limitaremos a la teoría local (que, básicamente, es la misma pero permite tratar en mayor profundidad algunos tópicos sin tener que ver una enorme cantidad de resultados globales previos). Por esta misma razón, sí son una referencia imprescindible para el último tema

Para la parte dedicada a las ecuaciones diferenciales, una buena referencia es el libro de Arnold [8].

[1] T. Apostol: Análisis matemático. Reverté, 1976.

[2] C. H. Edwards: Advanced calculus of several variables. Ac. Press, 1973.

[3] M. Spivak: Cálculo en variedades. Reverté, 1981.

[4] R. B. Buck: Advanced Calculus. McGraw-Hill, 1978.

[5] K. Jänich: Vector analysis. Springer, 1993.

[6] F. Warner: Foundations of differentiable manifolds and Lie groups. Scott Foreman and Co. 1976.

[7] R. Abraham and J. Marsden: Foundations of Mechanics (2nd ed.). Addison Wesley, 1987.

[8] V. I. Arnold, M. Levi: Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations. Springer Verlag, 1997.

Metodología y evaluación

A lo largo del curso se asignarán tareas individuales y en grupo. Habrá exámenes al final de cada tema (que comprenderán *todo* lo visto hasta ese tema) y un trabajo final. El porcentaje de cada una de estas evaluaciones en la nota final será el siguiente:

Tareas	50 %
Exámenes por temas	25 %
Trabajo Final	25 %.

Exámenes: Los alumnos que no obtengan una calificación de 6 mediante el sistema anterior, podrán optar por el examen final ordinario, cuya fecha se establecerá de acuerdo con lo que determine la Secretaría Escolar de la Facultad de Ciencias.

Colección de problemas

1. (**Lema de Hadamard**) Para toda función $f \in \mathcal{O}_p(U)$ existen n funciones $f_1, ..., f_n \in \mathcal{O}_p(U)$ tales que:

$$f = f(p) + \sum_{i=1}^{n} (x^i - x^i(p)) f_i$$

en un cierto entorno de $p \in U$.

2. (**Coordenadas esféricas**) Probar que las funciones

$$\begin{cases} f(x,y,z) = x \sin y \cos z \\ \\ g(x,y,z) = x \sin y \sin z \\ \\ h(x,y,z) = x \cos y \end{cases}$$

constituyen un sistema de coordenadas locales en todo punto de un abierto $U \subset \mathbb{R}^3$ que se determinará.

3. (**Coordenadas parabólicas**) Probar que las funciones

$$\begin{cases} f(x,y,z) = xy \cos z \\ \\ g(x,y,z) = xy \sin z \\ \\ h(x,y,z) = \frac{1}{2}(x^2 - y^2) \end{cases}$$

constituyen un sistema de coordenadas locales en todo punto de un abierto $U \subset \mathbb{R}^3$ que se determinará.

4. Consideremos la curva en $\mathbb{R}^2$ dada por $\sigma(t) = (t^2 - 1, t^3 - t)$. Calcular $\sigma(t)$ y $\sigma'(t)$ para los valores $t = 1$ y $t = -1$. Comparar $\sigma(1)$ con $\sigma(-1)$ y $\sigma'(1)$ con $\sigma'(-1)$.

5. Sea la curva en $\mathbb{R}^2$ definida por sus componentes $x(t) = \cos t$ y $y(t) = \sin t$, para $t \in]0, \pi[$, y la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = 2x + y^3$. Calcular el vector v tangente a la curva en $\pi/4$ y determinar $v(f)$.

6. (**Fórmulas de cambio de base**) Sean $\{x^i\}_{i=1}^n$ y $\{y^j\}_{j=1}^n$ dos sistemas de coordenadas locales en un punto $p \in U \subset \mathbb{R}^n$. Si $F : (U, \{y^j\}_{j=1}^n) \to (U, \{x^i\}_{i=1}^n)$ es la aplicación que determina el cambio de coordenadas,

a) Probar las fórmulas de cambio de base en T_pU:

$$\left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_p = \left.\frac{\partial F^i}{\partial y^j}\right|_p \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p.$$

b) Probar las fórmulas de cambio de base en T_p^*U:

$$d_p x^i = \left.\frac{\partial F^i}{\partial y^j}\right|_p d_p y^j.$$

7. Escribir en coordenadas cilíndricas[1] el campo vectorial $X \in X(\mathbb{R}^3)$

$$X = 2\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} + 3\frac{\partial}{\partial z}.$$

8. Sea $\phi : U \subset \mathbb{R}^n \to V \subset \mathbb{R}^n$ una aplicación diferenciable, con U, V abiertos, y sean $\{x^i\}_{i=1}^n$ y $\{y^j\}_{j=1}^n$, respectivamente, dos sistemas de coordenadas locales sobre U y V. Calcular las expresiones locales de ϕ_{*p} y de ϕ_p^* en esas coordenadas.

9. Sean $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dadas respectivamente por

$$f(x, y) = (x^2 - 2y, 4x^3y^2)$$
$$g(x, y) = (x^2y + y^2, x - 2y^3, ye^x).$$

a) Calcular $f_{*(1,2)}$ y $g_{*(x,y)}$.

b) Calcular $g_{*(0,1)}\left(4\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\right)$.

c) Determinar las condiciones que deben satisfacer las constantes λ, μ, ν para que el vector

$$\lambda \left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_{g(0,0)} + \mu \left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_{g(0,0)} + \nu \left.\frac{\partial}{\partial z}\right|_{g(0,0)}$$

sea la imagen de algún otro vector bajo g_*.

10. Aprovechando el isomorfismo $\mathbb{R}^4 \simeq Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$, los elementos $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ pueden escribirse como matrices de la forma

$$A = \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix}.$$

Sea

$$M_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

y denotemos por $T_\theta : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la transformación diferenciable dada por $T_\theta(A) = M_\theta \cdot A$. Se pide:

[1] Las coordenadas cilíndricas en $\mathbb{R}^3$, (ρ, θ, z), se relacionan con las cartesianas mediante $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, $z = z$.

a) Determinar $T_{\theta *}$.

b) Calcular $T_{\theta *}X$, donde

$$X = \cos\theta \frac{\partial}{\partial x} - \sin\theta \frac{\partial}{\partial y} + \cos\theta \frac{\partial}{\partial z} - \sin\theta \frac{\partial}{\partial t}.$$

11. Dar una definición de superficie inmersa en $\mathbb{R}^3$ que sea análoga a la vista en el curso para una curva parametrizada.

12. Consideremos la aplicación $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$\phi(t) = (t^2, t^3).$$

¿Se trata de una inmersión?

13. Sean $U, \overline{U} \subset \mathbb{R}^n$ abiertos tales que $\overline{U} \subset U$. Probar que la restricción de campos vectoriales establece un morfismo $\rho-$semilineal[2] (siendo ρ la restricción de funciones) del $\mathcal{O}(U)-$módulo $\mathcal{X}(U)$ en el $\mathcal{O}(\overline{U})-$módulo $\mathcal{X}(\overline{U})$. Además, si $\overline{D} \in \mathcal{X}(\overline{U})$ es la restricción del campo $D \in \mathcal{X}(U)$ y $\overline{f} \in \mathcal{O}(\overline{U})$ es la restricción de $f \in \mathcal{O}(U)$, se cumple

$$\overline{D(f)} = \overline{D}(\overline{f}).$$

14. Calcular *todos* los corchetes de Lie que se pueden construir entre los siguientes campos vectoriales sobre $U = \mathbb{R}^2$:

$$D_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad D_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad D_3 = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}.$$

15. (**Distribuciones involutivas**) Una distribución sobre $U \in \mathbb{R}^n$ es un $\mathcal{O}(U)-$submódulo $\Delta \in \mathcal{X}(U)$ cumpliendo lo siguiente: para todo campo $\mathcal{X}(U)$ tal que $\forall p \in U$ es $X(p) \in \{Y(p) \in \Delta\}$, ocurre que $X \in \Delta$. Una distribución Δ se dice que es *involutiva* si para cualquier par de campos $X, Y \in \Delta$ se cumple que $[X, Y] \in \Delta$. Consideremos $U = \mathbb{R}^3$ y la distribución $\Delta = \langle\{X_1, X_2\}\rangle$, donde $X_1 = x^3 \frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{\partial}{\partial x^3}$ y $X_2 = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x^3}$. ¿Es Δ involutiva?.

16. Consideremos en $\mathbb{R}^3$ los campos vectoriales

$$X = xy\frac{\partial}{\partial x} + x^2\frac{\partial}{\partial z}, \quad Y = y\frac{\partial}{\partial y},$$

junto con la función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Se pide calcular:

[2]Dado un $A-$módulo M, una aplicación $\varphi : M \to M$ se dice que es semilineal respecto del endomorfismo $f : A \to A$ (o $f-$semilineal) si

$$\varphi(am) = f(a)\varphi(m), \ \forall a \in A, \forall m \in M.$$

Obervese que la linealidad corresponde a la semilinealidad respecto de $f = id_A$.

a) $[X,Y]|_{(1,1,0)}$

b) $fX|_{(1,1,0)}$

c) $(Xf)(1,1,0)$

d) $f_*X|_{(1,1,0)}$.

17. Determinar las curvas integrales del siguiente campo vectorial en $\mathbb{R}^3$:

$$y\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + 2\frac{\partial}{\partial z}.$$

18. Para cada uno de los siguientes campos vectoriales, obtener sus curvas integrales y determinar si el campo es o no completo.

a)
$$X = \frac{\partial}{\partial x} \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\})$$

b)
$$X = \frac{\partial}{\partial y} + e^x\frac{\partial}{\partial z} \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^3)$$

c)
$$X = e^{-x}\frac{\partial}{\partial x} \in \mathcal{X}(\mathbb{R})$$

d)
$$X = y\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}x^2\frac{\partial}{\partial y} \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^2)$$

e)
$$X = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y} \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^2).$$

19. Probar la **fórmula de Leibniz**: para todas $f, g \in \mathcal{O}(U)$,

$$d(f\cdot g) = (df)\cdot g + g\cdot df$$

20. Sea $\tau \in Aut^\infty(U)$, con $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $p \in U$. Probar que si $D \in \mathcal{X}(U)$, entonces τ_*D es el campo vectorial dado por

$$(\tau_*D)_p = \tau_{*\tau^{-1}(p)}(D_{\tau^{-1}(p)}).$$

21. (**La diferencial conmuta con el pull-back**) Sea $\tau \in Aut^\infty(U)$, con $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Entonces, para toda $f \in \mathcal{O}(U)$ es

$$\tau^*(df) = d(\tau^*f).$$

22. Sea $\tau \in Aut^{\infty}(U)$, con $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $p \in U$. Probar que si $\omega \in \Omega^1(U)$, entonces $\tau^*\omega$ es la $1-$forma diferencial dada por

$$(\tau^*\omega)_p = (\tau^{-1})^*_p(\omega_{\tau^{-1}(p)}).$$

23. Probar que el generador infinitesimal de un grupo uniparamétrico de automorfismos $\{\tau_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ sobre un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$, es un elemento de $\mathcal{X}(U)$.

24. (**Traslaciones y momento lineal**) Calcular el generador infinitesimal del grupo uniparamétrico de las traslaciones a lo largo del eje X en $\mathbb{R}^2$:

$$\tau_t(a,b) = (a-t,b).$$

Nota: En Física, este generador infinitesimal se conoce como el *operador de momento lineal*.

25. Calcular el generador infinitesimal del grupo uniparamétrico de las homotecias en $\mathbb{R}^2$:
$$\tau_t(a,b) = (ae^{-t}, be^{-t}).$$

26. Calcular el generador infinitesimal del grupo de las rotaciones alrededor del origen en $\mathbb{R}^2$:

$$\tau_t(a,b) = (a\cos t + b\sin t, -a\sin t + b\cos t).$$

27. (**Rotaciones y momento angular**) Calcular los generadores infinitesimales correspondientes a las siguientes rotaciones en $\mathbb{R}^3$:

a)

$$X_t \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & \sin t \\ 0 & -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \quad \text{(rotación alrededor del eje X)}$$

b)

$$Y_t \equiv \begin{pmatrix} \cos t & 0 & \sin t \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin t & 0 & \cos t \end{pmatrix} \quad \text{(rotación alrededor del eje Y)}$$

c)

$$Z_t \equiv \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & 0 \\ -\sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(rotación alrededor del eje Z)}$$

Nota: En Física, los respectivos generadores se denotan por L_x, L_y, L_z y se denominan *operadores de momento angular*.

28. (**Introducción a las álgebras de Lie I**) Calcular los corchetes de Lie de todos los operadores L_x, L_y, L_z del ejercicio (27). El espacio vectorial real $\langle\{L_x, L_y, L_z\}\rangle$ (como subespacio de $End\mathcal{O}(\mathbb{R}^3)$) junto con el corchete $[.,.]$ extendido por bilinealidad, constituye un álgebra de Lie real que se representa por $so(3)$ y se conoce como el álgebra de las rotaciones tridimensionales. Comprobar que se cumplen las propiedades que definen un álgebra de Lie real, esto es:

   a) bilinealidad (respecto a $\mathbb{R}$),

   b) antisimetría

   c) *identidad de Jacobi*: para todos $A, B, C \in so(3)$ se tiene

$$[A,[B,C]] = [[A,B],C] + [B,[A,C]].$$

29. (**Introducción a las álgebras de Lie II**) Si $(V, [.,.]_V)$ y $(W, [.,.]_W)$ son dos álgebras de Lie sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ (que para nosotros siempre será $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$), un morfismo de espacios vectoriales $f \in Hom_{\mathbb{K}}(V, W)$ se dice que es un morfismo de álgebras si además cumple que, para todos $u, v \in V$,

$$f([u,v]_V) = [f(u), f(v)]_W.$$

Un morfismo de álgebras se denomina epimorfismo, monomorfismo o isomorfismo según lo sea la aplicación f subyacente. Consideremos ahora el espacio vectorial real $\mathbb{R}^3$ junto con el corchete de Lie dado por:

$$[u,v]_{\mathbb{R}^3} = u \times v$$

(siendo $u \times v$ el producto vectorial usual de $\mathbb{R}^3$). Probar que existe un isomorfismo entre $so(3)$ (con el corchete del ejercicio (28)) y $\mathbb{R}^3$ con el corchete que acabamos de introducir.

30. Sean los campos vectoriales en $\mathbb{R}^3$

$$D_1 = x\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial z}, \quad D_2 = xz\frac{\partial}{\partial x} + x^2 y\frac{\partial}{\partial y} - 3(z-x)\frac{\partial}{\partial z},$$

y la 1−forma en $\mathbb{R}^3$

$$\omega = \frac{1}{1+(x^2+y^2+z^2)}dx + e^{xyz}dy + (xz-y)dz.$$

Calcular $\mathcal{L}_{[D_1,D_2]}\omega$.

31. (**Acción de los automorfismos sobre generadores infinitesimales**) Sea $\{\tau_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ un grupo uniparamétrico de automorfismos sobre un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$, con generador inifinitesimal $D \in \mathcal{X}(U)$. Sea $\sigma \in Aut^\infty(U)$. Demostrar que $\{\sigma^{-1} \circ \tau_t \circ \sigma\}_{t\in\mathbb{R}}$ (que denotaremos abreviadamente por $\{\tau_t^\sigma\}_{t\in\mathbb{R}}$) es un grupo uniparamétrico de automorfismos de $U \subset \mathbb{R}^n$ con generador $\sigma_* D$. En otras palabras: *el generador del grupo conjugado es el push-forward del generador original.*

32. Si $\{\tau_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ es un grupo uniparamétrico de automorfismos sobre un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$, con generador inifinitesimal $D \in \mathcal{X}(U)$ tal que no se anula en ningún punto, probar que el $1-$módulo $\langle D\rangle$ representa una ecuación diferencial que admite como soluciones a las órbitas del grupo. Estudiar el caso particular de las traslaciones, homotecias y rotaciones.

33. Sea $\pi : V \to \overline{V}$ una proyección diferenciable. Probar que un campo $D \in \mathcal{X}(U)$ es $\pi-$proyectable si y sólo si para cada punto $\overline{p} \in \overline{V}$, el vector $\pi_{*p}(D_p)$ no depende del punto en la fibra $p \in \pi^{-1}(\overline{p})$.

34. Encontrar la expresión general de las ecuaciones diferenciales sobre el plano que son invariantes por el campo vectorial

$$D = \frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}.$$

35. Se dan en el plano los campos vectoriales

$$X = x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}, \quad Y = \frac{\partial}{\partial x} + f\frac{\partial}{\partial y}.$$

Se pide determinar $f \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^2)$ de modo que la ecuación diferencial $\langle Y\rangle$ sea invariante por X. Integrar la ecuación diferencial resultante.

36. Hallar un campo vectorial que deje invariante la ecuación

$$y' = f(x + ay), \quad a \in \mathbb{R}$$

y utilizarlo para integrarla.

37. Hallar el anillo de integrales primeras del sistema

$$\begin{cases} (z-y)^2 \frac{dy}{dx} = z \\ \\ (z-y)^2 \frac{dz}{dx} = y \end{cases}$$

38. (**Ecuaciones homogéneas I**) Resolver la ecuación homogénea

$$(x-y)ydx - x^2dy = 0.$$

39. (**Ecuaciones lineales**) Resolver la ecuación lineal

$$y' = \frac{y}{x} + x^2.$$

40. (**Ecuaciones homogéneas II**) Resolver la ecuación reducible a homogénea

$$y' = \frac{x+y-3}{1-x+y}.$$

41. (**Ecuaciones de Bernouilli**) Resolver la ecuación

$$y' - \frac{3}{x}y + x^3y^2 = 0.$$

42. (**Ecuaciones lineales II**) Resolver la ecuación reducible a lineal

$$3xy^2y' + y^3 - 2x = 0.$$

43. Probar que la función $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $\varphi(x) = x^3$ es una carta que determina una estructura diferencial C^∞ sobre $\mathbb{R}$, la cual es diferente de la usual.

44. Para cada número real $r > 0$ se define la aplicación

$$\varphi_r(t) = \begin{cases} t & si\ t \leq 0 \\ rt & si\ t \geq 0 \end{cases}.$$

Probar que $\{(\mathbb{R}, \varphi_r)\}_{r\in\mathbb{R}}$ define una familia no numerable de estructuras diferenciales sobre $\mathbb{R}$.

45. (**La banda de Möbius como variedad**) Se define la banda de Möbius M como el cociente topológico de $[0,1] \times \mathbb{R}$ por la relación de equivalencia $\sim$ que identifica los pares $(0, y)$ y $(1, -y)$. Mostrar que M admite una estructura de variedad C^∞ compatible con su topología cociente.

46. Probar, por medio de algún ejemplo, que existen variedades C^∞ admitiendo abiertos que no son dominios de ninguna carta coordenada.

47. Proporcionar algún ejemplo de variedad diferencial C^∞ que no es de Hausdorff.

48. Proporcionar algún ejemplo de variedad diferencial C^∞ que no es 2AN pero que, sin embargo, es paracompacta.

49. Proporcionar algún ejemplo de subconjunto de $\mathbb{R}^n$ que no admita ninguna estructura de tipo C^k con $k \geq 0$.

50. (**Los cuaternios como grupo de Lie**) Probar que el grupo multiplicativo de los cuaternios $\mathbb{H}^0$ es un grupo de Lie.

51. (**El grupo de Heisenberg**) Sea H el grupo de las matrices reales 3×3 del tipo

$$\begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Mostrar que H admite una estructura diferencial C^∞ que lo convierte en una variedad.

b) Mostrar que el producto matricial en H es una operación diferenciable respecto a la estructura de variedad del apartado precedente, de manera que H es un grupo de Lie (conocido como el grupo de Heisenberg, de capital importancia en el estudio de la Mecánica Cuántica).