Materiales para la asignatura de Cálculo III

Profesor: José Antonio Vallejo Rodríguez
Facultad de Ciencias UASLP
e-mail:jvallejo@fciencias.uaslp.mx

Semestre III Curso $2009 - 10$

Temario de la asignatura

TEMA 0: Introducción a Maxima y wxMaxima

0.1 Paquetes informáticos de cálculo simbólico. El lenguaje LISP y Maxima. 0.2 El entorno gráfico wxMaxima 0.3 Comandos básicos de Máxima. 0.4 Comandos específicos para cálculo diferencial. 0.5 Gráficos en wxMaxima. 0.6 Programación.

TEMA I: Nociones básicas de topología en $\mathbb{R}^n$

1.1 El espacio normado $\mathbb{R}^n$. 1.2 El espacio euclideo $\mathbb{R}^n$. 1.3 El espacio métrico $\mathbb{R}^n$. 1.4 Convergencia. 1.5 Conexión. 1.6 Compacidad.

TEMA II: Continuidad

2.1 Funciones entre espacios euclideos de dimensión finita. 2.2 Límites. 2.3 Continuidad de funciones $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$. 2.4 Continuidad uniforme.

TEMA III: Diferenciabilidad

3.1 La derivada en $\mathbb{R}$ y el problema de su generalización. 3.2 Derivadas direccionales y diferencial. 3.3 La regla de la cadena. 3.3 El teorema del valor medio. 3.4 Curvas en $\mathbb{R}^n$. 3.6 Campos vectoriales.

TEMA IV: Desarrollo de Taylor y cálculo de extremos

4.1 Derivadas parciales de orden superior. La clase $C^\infty(U)$. 4.2 El desarrollo de Taylor. 4.3 Cálculo de extremos locales de funciones $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. 4.4 Análisis global. 4.5 Extremos restringidos.

TEMA V: Funciones inversas e implícitas

5.1 Funciones con determinante Jacobiano no nulo. 5.2 El teorema de la función inversa. 5.3 El teorema de la función implícita.

Referencias

Los siguientes libros se pueden encontrar en la biblioteca central (edificio del CICTD). Hay copias de algunos en la biblioteca del departamento de matemáticas. Por supuesto, la lista no es exhaustiva, sólo se incluyen los libros que más usaremos de entre los que se encuentran disponibles en la biblioteca, pero se anima al estudiante a consultar cualquier texto que le parezca adecuado.

- T. Apostol: Análisis matemático. Reverté, 1976.
  Es la referencia básica para la asignatura. Excelente, muy detallado y con una magnífica colección de ejercicios. Contiene todo lo que veremos en el curso y muchísimos tópicos adicionales.

- C. H. Edwards: Advanced calculus of several variables. Academic Press, 1973.
  Este texto marcó un antes y un después en el tratamiento del análisis matemático en los cursos de licenciatura (¡allá por el año 1965!). La novedad que introdujo consistía en el uso sistemático e intensivo de las formas diferenciales. En este curso sólo haremos uso implícito de las formas de grado 1 (la diferencial de una aplicación es un ejemplo), pero seguiremos de cerca el espíritu geométrico que Edwards refleja en su libro.

- W. H. Fleming: Funciones de varias variables. CECSA, 1976.
  Un libro semejante al de Apostol, pero cubre un número menor de tópicos.

- J. E. Marsden: Elementary classical analysis. Freeman and Co, 1974.
  Muy detallado y con numerosos ejemplos interesantes.

- R. B. Buck: Advanced Calculus. McGraw-Hill, 1978.
  Como su título indica, es un texto avanzado. El análisis que hace del teorema de cambio de variable (que no veremos en este curso) es magnífico.

- M. Spivak: Cálculo en variedades. Reverté, 1988.
  Un libro que debe estar en la biblioteca personal de cualquier estudiante serio de matemáticas. Breve y directo, el que más dice con menos palabras. Su colección de ejercicios ilustra por qué Spivak es considerado como uno de los mejores autores de libros de texto.

- G. Flory: Ejercicios de topología y análisis (especialmente el tomo III). Reverté, 1981.

- M. R. Spiegel: Cálculo Superior. McGraw-Hill serie Schaum, 1969.
  Dos libros de problemas. El primero es mucho más avanzado que el segundo.

Descripción del curso

El curso es una introducción al estudio del cálculo diferencial en varias variables. Los contenidos son estándar, no hay mucho lugar para la innovación en un curso como éste; sin embargo, la estructura de los temas merece algún comentario.
En primer lugar, haremos uso de herramientas informáticas para estudiar ciertos tópicos (notablemente las representaciones gráficas), el paquete de CAS elegido para ello es Maxima con su interfaz wxMaxima. Se trata de una herramienta muy potente, disponible en cualquier entorno de ususario (Windows, MacOS, Unix y Linux), basada en software libre y gratuita. Al principio del curso, haremos una breve introducción a Maxima, pero se espera que el estudiante tenga iniciativa, aprenda a consultar la ayuda del programa y la que hay disponible en Internet de manera que profundice por sí mismo en su uso. Con respecto a los contenidos técnicos, tras un repaso de la topología de espacios normados (incluyendo la continuidad), pasaremos a estudiar el concepto básico del curso: la noción de diferencial de una aplicación diferenciable entre subconjuntos abiertos de espacios normados.
La diferencial es la mejor generalización que se puede hacer en el caso de dimensiones superiores del concepto de derivada de una función de una variable, y mantiene la interpretación geométrica de proporcionar la mejor aproximación afín a la gráfica de una función. Con mayor precisión, introduciremos la diferencial en un punto como una aplicación lineal asociada a la función, de manera que podremos aplicar todo el arsenal del Álgebra Lineal para estudiar cuestiones referentes a la diferenciablidad de aplicaciones. Se espera, pues, que el estudiante tenga una buena base en álgebra y que conozca los conceptos básicos de matriz asociada a una aplicación lineal, producto de matrices y su relación con la composición de aplicaciones, cambios de base, espacio dual, etc.
Construcciones típicas en un curso de estas características, como las derivadas parciales y direccionales, se obtendrán como consecuencia de particularizar la acción de la diferencial a ciertos subespacios especiales del plano tangente. De esta manera, se hará patente la dualidad presente en todo el curso: que los conceptos del Análisis Matemático tienen un origen algebraico y una interpretación geométrica también.
Una segunda parte del curso consistirá en aplicaciones del formalismo de la diferencial: cálculo de extremos (local, global y restringido) y los teoremas más importantes del curso desde el punto de vista teórico: el de la función inversa y el de la función implícita.
Por último, en cuanto a los prerrequisitos, se supondrá que el alumno ha llevado unos buenos cursos de Cálculo I y II y de Álgebra I y II (por "buen curso"se entiende uno que ha cubierto el temario especificado en el plan de estudios y en el que se han presentado ejemplos y ejercicios de cada uno de los temas) y que, obviamente, los tiene aprobados. El campo natural de aplicación de las herramientas del cálculo diferencial es la Física. A lo largo del curso, veremos

numerosas aplicaciones a la Mecánica de partículas, por lo que también es deseable (aunque no imprescindible) cierta familiaridad con los conceptos básicos de Física, digamos al nivel de las asignaturas de física que se imparten en el tronco común.

Metodología y evaluación

El curso se desarrollará intercalando clases expositorias por parte del profesor con sesiones de problemas y sesiones con uso de computadora.
Durante las clases expositorias se enunciarán y demostrarán los resultados teóricos que componen la base del curso. A lo largo de estas clases, se propondrán cuestiones cuya resolución puntuará en la calificación final del estudiante.
Las sesiones de problemas consistirán en la resolución de parte de los problemas que figuran en estos mismos materiales. Los problemas no vistos en las clases, serán propuestos a los estudiantes y contribuirán a la calificación final. Se espera que los estudiantes participen en las sesiones de problemas exponiendo la resolución de aquellos que hayan hecho.
Finalmente, las sesiones con computadora se basarán en el manejo de Maxima y tienen por finalidad que el estudiante se introduzca en el manejo de software científico, aprenda a interpretar datos visualmente y adquiera una comprensión e intuición geométricas que le ayude en la resolución de problemas. Opcionalmente podrán proponerse trabajos basados en el uso de software.
Se espera que la presentación de todos los problemas y tareas propuestos se haga en LaTeX. A lo largo del periodo lectivo se organizarán cursos de LaTeX en la Facultad, a los que se insta a participar.
Hay dos opciones de evaluación:

A (Evaluación continua): Los alumnos que opten por este sistema, serán evaluados mediante los trabajos y tareas semanales junto con los exámenes parciales al final de cada tema. El porcentaje de cada parte será:

Tareas	45 %
Exámenes por temas	30 %
Cuestiones y trabajos con software	25 %.

B (Evaluación tradicional): Los alumnos cuya calificación final según el apartado A sea inferior a 6 y aquellos que así lo elijan desde el principio, podrán optar por un examen final ordinario con los contenidos de toda la asignatura, cuya fecha se establecerá de acuerdo con los lineamientos de la Secretaría Escolar.

Colección de problemas

TEMA I: Nociones básicas de topología en $\mathbb{R}^n$

1. Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$, probar que $| < x, y > | = ||x|| \cdot ||y||$ si y sólo si x, y son linealmente dependientes.

2. **(Teorema de Pitágoras)** Demostrar que si x, y son vectores ortogonales (respecto de la métrica euclidea) de $\mathbb{R}^n$, entonces $||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$.

3. Demostrar las siguientes relaciones:

   a) $ad(M) = int(M) \cup Fr(M)$
   b) $int(M) \cap Fr(M) = \emptyset$
   c) $M = int(M) \cup (M \cap Fr(M))$
   d) $int(M) \cap (M \cap ad(X - M)) = \emptyset$
   e) $ad(M) = M \cup Fr(M)$.

4. Sean M, N, A y C subconjuntos de $\mathbb{R}^n$. Probar que:

   a) $ad(M) \cup ad(N) = ad(M \cup N)$
   b) Si A es abierto y C es cerrado, entonces, $A \cup C$ es cerrado sii $Fr(A) \subset C$.

5. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$, ¿$int(Fr(A))$ es siempre vacío?.

6. Recordemos que un subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ se dice que es denso si $ad(A) = \mathbb{R}^n$. Probar lo siguiente:

   a) A es denso $\Longleftrightarrow \forall G \subset \mathbb{R}^n$ abierto no vacío, es $G \cap A \neq \emptyset$.
   b) Si A es denso y G es abierto, $G \subset ad(A \cap G)$.

7. Sea G un subgrupo del grupo aditivo $(\mathbb{R}, +)$.

   a) Si G tiene un punto de acumulación, entonces existe una subsucesión convergente al 0 y G es denso en $\mathbb{R}$.
   b) En caso contrario, $G = \mathbb{Z}a$, donde $a \in G - \{0\}$.

8. Determinar si los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$ son abiertos o cerrados y obtener su interior, adherencia y puntos de acumulación.

   a) $\mathbb{Z}$
   b) $]0, b[$, $b > 0$.
   c) $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$
   d) $\mathbb{Q}$

e) $\{\frac{1}{2^n} + \frac{1}{5^m} : n, m \in \mathbb{N}\}$

f) $\{\frac{m}{2^n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$.

9. Determinar los puntos de acumulación de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ y decidir si los conjuntos son abiertos, cerrados o ninguno de los dos.

   a) $A = \{x \in \mathbb{R}^2 : ||x|| > 1\}$

   b) $B = \{x \in \mathbb{R}^2 : ||x|| \geq 1\}$

   c) $C = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = (\frac{1}{n}, \frac{1}{m}); n, m \in \mathbb{N}\}$

   d) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 < 1\}$

10. Hallar los puntos de acumulación del siguiente subconjunto de $\mathbb{R}^2$,

$$\left\{ \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}, \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) : p, q \in \mathbb{N} \right\}.$$

11. En el espacio vectorial $\mathcal{M}at_2(\mathbb{R})$ de las matrices reales de dimensión 2×2, se define

$$||A||_\infty = \max_{1 \leq i \leq 2} \left\{ \sum_{j=1}^{2} |a_{ij}| \right\}.$$

Probar que $|| \cdot ||_\infty$ es una norma en $\mathcal{M}at_2(\mathbb{R})$. Dada la sucesión $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ de elementos de $\mathcal{M}at_2(\mathbb{R})$, donde

$$A_n = \begin{pmatrix} (-1)^n & \frac{1}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

calcular los puntos de adherencia de $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ respecto de la métrica inducida por $|| \cdot ||_\infty$.

12. Probar que todas las normas en $\mathbb{R}^n$ son equivalentes. Utilizar este hecho para probar que todas las normas en $\mathbb{R}^n$ definen la misma topología.

13. **(Ley del paralelogramo)** Si $x, y \in \mathbb{R}^n$ probar que (en la norma euclidea)

$$||x + y||^2 + ||x - y||^2 = 2||x||^2 + 2||y||^2.$$

Deducir que si $A \subset \mathbb{R}^n$ es un cerrado convexo no vacío y $x_0 \notin A$, entonces existe un único punto en A que es el más próximo a x_0.

14. Sean $A, B \subset \mathbb{R}^n$. Se llama distancia entre A y B al número

$$d_{A,B} = inf\{||a - b|| : a \in A, b \in B\}.$$

   a) Si A y B son compactos, entonces, existen un $x_0 \in A$ y un $y_0 \in B$ tales que $d_{A,B} = ||x_0 - y_0||$.

   b) La propiedad anterior deja de verificarse si A y B son sólo cerrados.

15. Un subconjunto S de $\mathbb{R}^n$ se dice que es convexo si para todos $x, y \in S$ y para todo $0 < t < 1$ se verifica que $tx + (1-t)y \in S$. Probar que toda bola abierta y toda bola cerrada son conjuntos convexos (utilizar la norma euclidea).

16. Probar que todo subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$ es conexo.

17. Sea $S \subset \mathbb{R}^n$ conexo. Probar que todo $C \subset \mathbb{R}^n$ tal que $S \subset C \subset ad(S)$ es conexo.

18. Sea $C \subset \mathbb{R}^2$ el conjunto definido en coordenadas polares (ρ, θ) por las relaciones
$$1 \geq \rho \neq \frac{\sqrt{\theta}}{1+\sqrt{\theta}}.$$
    a) Representar la curva que tiene por ecuación $\rho = \sqrt{\theta}/(1+\sqrt{\theta})$ (en coordenadas polares).
    b) Identificar $ad(C)$, $int(C)$ y $Fr(C)$.
    c) ¿Es C conexo por arcos?.
    d) ¿Es C conexo?.

19. Sea $S = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión convergente a x_0 en un espacio métrico (X, d). Probar que el conjunto $A = \{x_0\} \cup S$ es compacto.

20. En $\mathbb{R}$ se define la distancia
$$d(x, y) = |\arctan x - \arctan y|.$$
Compararla con la distancia usual $d_{eu}(x, y) = |x-y|$. Demostrar que $(\mathbb{R}, d)$ no es completo.

TEMA II: Continuidad

1. Sean $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$ y $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Para cada $x \in \mathbb{R}$, denotaremos $f_1(x) = \lim_{y\to b} f(x,y)$ y para cada $y \in \mathbb{R}$ denotaremos $f_2(x) = \lim_{x\to a} f(x,y)$. suponiendo que estos límites existen,

    a) Probar que si existe $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$, entonces existe $\lim_{x\to a} f_1(x) = L$ y $\lim_{y\to b} f_2(x) = L$.

    b) Probar, con un ejemplo, que los límites reiterados pueden existir y ser distintos.

    c) Probar, con un ejemplo, que los límites reiterados pueden existir, ser iguales y, sin embargo, no existir $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$.

    d) Probar, con un ejemplo, que puede existir $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ sin que exista alguno de los límites reiterados.

2. Calcular
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x \operatorname{sen} y + y}{|x| + |y|}.$$

3. Determinar la existencia del límite en $(0,0)$ de:

    a)
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

    b)
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^3}{x^4+y^6} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

4. Determinar la existencia de los límites reiterados y del límite cuando $(x,y) \to (0,0)$ de la función
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y}{\tan x - \tan y} & \tan x \neq \tan y \\ \cos^3 x & \tan x = \tan y \end{cases}$$

5. Calcular los siguientes límites:

    a)
$$\lim_{(x,y)\to(0,2)} y\frac{\operatorname{sen} x}{x}$$
.

b)
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(xy)}{x}.$$

6. **(Límites en polares)** Sean $A =]0,\infty[\times]0,2\pi[\subset \mathbb{R}^2$ y $g : A \to \mathbb{R}^2$ la función definida por
$$g(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta).$$
   a) Probar que g es una biyección continua de A sobre $B = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ tal que si llamamos $A_\alpha = \{(\rho,\theta)\ :\ 0 < \rho < \alpha,\ 0 < \theta \leq 2\pi\}$ es
$$g(A_\alpha) = B_\alpha((0,0)) - \{(0,0)\}.$$
   b) Sean $f : B \to \mathbb{R}$ y $F = f \circ g : A \to \mathbb{R}$. Probar que una condición necesaria y suficiente para que sea
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = a,$$
   es que $\forall\epsilon > 0,\ \exists\delta > 0$ tal que si $0 < \rho < \delta \Rightarrow |F(\rho,\theta) - a| < \epsilon$ para todo $\theta \in]0,2\pi]$ (se dice entonces que $\lim_{\rho\to 0} F(\rho,\theta) = a$ **uniformemente** en θ).

7. Calcular los siguientes límites en $(0,0)$.

   a)
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^2(x^3+y^2)+x^4}{x^4+y^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$
   b)
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y+x\operatorname{sen} y}{\sqrt{x^2+y^2-xy}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

8. Estudiar si existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ siendo:
$$f(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+xy+2y^2}.$$

9. Sea f la función definida por
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^py^q}{2x^2+3y^2-xy} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$
   con $p,\ q > 0$. Discutir la existencia de $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ y calcularlo cuando exista.

10. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{(xy)^k}{x^4+y^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

con $k > 0$. Estudiar la continuidad de f en función de los valores del parámetro k.

11. Estudiar la continuidad en el orígen de:

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq 0 \text{ ó } y \geq x^2 \\ \\ 1 & \text{si } 0 < y < x^2 \end{cases}$$

12. Se considera la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por la expresión

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+x^8+y^8} & (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 1 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Estudiar la continuidad de f en los siguientes conjuntos:

a) $A = \mathbb{R}^2$

b) $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y \geq x^2, \ x \geq y^2\}$

13. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la función:

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(\frac{x^2y}{x^2+y^4}, \operatorname{sen}(x+y)\right) & (x,y) \neq (0,0) \\ \\ (0,0) & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Estudiar la continuidad de la función f. Demostrar que $f(M)$ es un conjunto compacto, siendo $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2+y^2 \leq 2x, \ y \leq x\}$.

14. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua. Probar que si $f(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{Q} \cap [a,b]$, entonces $f \equiv 0$ en $[a,b]$.

15. Sean un conjunto $C \subset \mathbb{R}^2$ y una función $f : C \to \mathbb{R}$. Analizar si es cierta o no la siguiente afirmación: "Si C es compacto y si f toma en un punto de C un valor positivo y en otro punto de C un valor negativo, y además f no se anula en ningún punto de C, entonces f no puede ser continua en todo C".

16. Sea $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ una función de la que se sabe que todas las funciones $y \mapsto f(a,y)$ (con $a \in [0,1]$ un parámetro) son continuas en $[0,1]$. Para poder asegurar que f es continua en $[0,1] \times [0,1]$:

    a) ¿Hace falta algún requisito adicional?

    b) ¿Es necesario que las dos funciones $x \mapsto f(x,0)$, $x \mapsto f(x,1)$ sean continuas en $[0,1]$?

    c) ¿Es suficiente con que las dos funciones de (b) sean continuas en $[0,1]$?

17. Probar que si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es continua y $A \subset \mathbb{R}^n$ es conexo, entonces $f(A)$ es conexo.

18. **(Distancia de un punto a un conjunto)** Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un compacto y $x \in \mathbb{R}^n$. Demostrar que existe un $y_0 \in K$ tal que $d(x,K) = d(x,y_0)$. Dar un contraejemplo para el caso en que K no sea compacto.

19. Sean $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^m$ y $f : A \to B$. Se dice que f es un **homeomorfismo** si f es biyectiva, continua y tiene inversa continua. Demostrar que si A es un compacto y f es biyectiva y continua, entonces f es un homeomorfismo.

20. **(Teorema del punto fijo de Banach)** Se dice que una aplicación $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es **contractiva** si existe un $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha < 1$, tal que

$$||f(x) - f(y)|| \leq \alpha ||x - y||, \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

    Demostrar que si f es contractiva, entonces tiene un único punto fijo, esto es, $\exists! u \in \mathbb{R}^n$ tal que $f(u) = u$.

TEMA III: Diferenciabilidad

1. Probar que si $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es lineal, entonces $\exists D_v f(x_0)$ para todo $v \in \mathbb{R}^n - \{0\}$.

2. Calcular las derivadas parciales de
$$f(x,y,z) = (x^2y - z, x + y + z).$$

3. Relación de las derivadas direccionales con la continuidad en las siguientes funciones:

   a)
$$f(x,y) = \begin{cases} y \sin \frac{1}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 \text{ si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   b)
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 \text{ si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

4. Sean las funciones $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ y $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definidas por
$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= (\sin(xy+z), (1+x^2)^{y^z}) \\ g(u,v) &= (u + e^v, v + e^u). \end{aligned}$$

   a) Demostrar que f es diferenciable en $(1,-1,1)$ y calcular $df_{(1,-1,1)}$.

   b) Demostrar que g es diferenciable en $(0, \frac{1}{2})$ y calcular $dg_{(0,\frac{1}{2})}$.

   c) Calcular $d(g \circ f)_{(1,-1,1)}$.

5. Sea
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\alpha(|x|+|y|)}{\sqrt{x^2+y^2}} \ , \ (x,y) \neq (0,0) \\ \\ \beta \ , \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$
   Hallar la relación entre α y β para que existan las derivadas parciales de f en $(0,0)$.

6. Sea $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$. Demostrar que las derivadas direccionales de la función f en $(0,0)$ sólo existen para las direcciones $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 1)$.

7. Estudiar la continuidad, existencia de derivadas parciales y diferenciablidad en $(0,0)$ de las siguientes funciones:

   a)
$$f(x,y) = \sqrt{|xy|}$$

b)

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 \text{ si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

c)

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 \text{ si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

8. Estudiar la continuidad, existencia de derivadas direccionales y diferenciabilidad en el origen de las siguientes funciones:

a)

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 \text{ si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

b)

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4-y^4}{x^2+xy+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 \text{ si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

c)

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\log(x^2+y^2) \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 \text{ si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

d)

$$f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}\sin\frac{1}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 \text{ si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

9. Calcular el vector gradiente de

   a) $f(x,y,z) = x^{y^z}$ en $(1,1,1)$.

   b) $f(x,y) = \log(x^2+2xy+1) + \int_0^x \cos^2 t dt$ en $(1,1)$.

10. Estudiar la continuidad, existencia de derivadas parciales y diferenciabilidad en el origen de

$$f(x,y) = \begin{cases} 3x \ , \ x = y \\ \\ 0 \ , \ x \neq y \end{cases} .$$

11. Sean $f_1, f_2, ..., f_n :]a,b[\to \mathbb{R}$ derivables. Se define $f :]a,b[^n \to \mathbb{R}$ por

$$f(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i).$$

Probar que f es diferenciable en x, $\forall x \in]a,b[^n$.

12. Estudiar las derivadas parciales y direccionales de

$$f(x,y) = \begin{cases} x + y \text{ si } x = 0 \text{ ó } y = 0 \\ \\ 1 \text{ si } xy \neq 0 \end{cases} .$$

13. **(Diferenciabilidad de las formas bilineales)** Sea $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una aplicación bilineal. Demostrar que B es diferenciable en todo punto $(a,b) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ con diferencial

$$dB_{(a,b)}(x,y) = B(a,y) + B(x,b).$$

14. **(Diferenciabilidad de la norma)** Demostrar que la aplicación $x \mapsto ||x||$ es diferenciable en $\mathbb{R}^n - \{0\}$. Calcular su diferencial.

15. Se sabe que la existencia de las derivadas parciales de una función $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ no garantiza su continuidad. Sin embargo, pruébese que se cumple la siguiente afirmación: sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que posee derivadas parciales $D_1 f(x)$,...,$D_n f(x)$ acotadas en un entorno del punto $a \in \mathbb{R}^n$. Entonces, f es continua en a.

16. Estudiar la diferenciabilidad en el origen de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, con

$$f(x,y) = \begin{cases} (e^{x+y}, \sin(x-y), x^2 \sin \frac{1}{x}) \text{ si } x \neq 0 \\ \\ (e^y, \sin(-y), 0) \text{ si } x = 0, \end{cases}$$

y de $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, siendo

$$g(x,y,z) = \begin{cases} (\cos yz, xyz, \frac{1}{z}) \text{ si } z \neq 0 \\ \\ (1,0,0) \text{ si } z = 0. \end{cases}$$

Calcular la diferencial en el origen cuando proceda.

17. **(Diferenciabilidad de las submersiones)** Sea $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en $a = (a_1, ..., a_k)$ y supongamos que $dg_a \equiv (b_1, ..., b_k)$. Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(n \geq k)$ está definida por

$$f(x_1, ..., x_n) = g(x_1, ..., x_k),$$

probar que f es diferenciable en todo x de la forma $x = (a_1, ..., a_k, x_{k+1}, ..., x_n)$ y que

$$df_x = (b_1, ..., b_k, 0, ..., 0).$$

Como aplicación, utilizando solamente este resultado, la regla de la cadena y la diferenciabilidad de las funciones elementales, probar que la función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x, y, z) = (\sin(x \sin(y \sin z)), e^x)$$

es diferenciable en $\mathbb{R}^3$ y calcular $df_{(0,\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}$.

18. Estudiar la continuidad en el origen y existencia de derivadas direccionales para $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida según

$$f(x, y) = \begin{cases} |x| \text{ si } |x| > |y| \\ \\ |y| \text{ si } |x| < |y| \end{cases}.$$

19. Sea $f_p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $(p \in \mathbb{N})$ definida por

$$f_p(x, y) = \begin{cases} \frac{x^p}{x^2+y^2} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \\ \\ 0 \text{ si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Discutir, según los valores de p:

a) Continuidad en $(0, 0)$.

b) Existencia de $D_v f_p(0, 0)$, siendo $v = (a, b)$ un vector unitario arbitrario.

c) Diferenciablilidad en $(0, 0)$.

d) Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$F(x, y) = (x + \cos y, f_4(x, y)).$$

Justificar la diferenciabilidad de $G(x, y) = F \circ F + F$ en $(0, 0)$ y calcular $dG_{(0,0)}$.

20. **(La diferenciabilidad en todo un abierto excepto en un punto, implica la diferenciabilidad en todo el abierto)** Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $a \in A$ y $f : A \to \mathbb{R}$ continua en A y tal que existen todas sus derivadas parciales y son continuas en $A - \{a\}$. Si para todo $i \in \{1, ..., n\}$ existe $d_i = \lim_{x \to a} D_i f(x)$, entonces, $D_i f(a) = d_i$ y f es de clase $\mathcal{C}^1(A)$.

21. Hallar los puntos de la superficie

$$z = 4x + 2y - x^2 + xy - y^2$$

en los que el plano tangente es paralelo al plano XY.

22. Determinar los valores de a, b, c para que la derivada direccional de la función $f(x,y,z) = axy^2+byz+cz^2x^3$ tenga en $(1,2,-1)$ un valor máximo de 64 en la dirección del eje OZ.

23. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $|f(x)| \leq M||x||^2$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Comprobar que entonces f es diferenciable en el origen. Aplicar este resultado a la función

$$f(x,y) = \begin{cases} Ax^2 \cos\frac{1}{x} + By^2 \sin\frac{1}{x} \text{ si } x \neq 0, y \neq 0 \\ \\ Cx^2 \sin\frac{1}{x} \text{ si } x \neq 0, y = 0 \\ \\ Dy^2 \cos\frac{1}{y} \text{ si } x = 0, y \neq 0 \end{cases} .$$

24. Sean $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable y $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$g(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2, x+y+z).$$

Sea $h = f \circ g$. Demostrar que

$$||\nabla h||^2 = 4(D_1 f)^{2\cdot} g_1 + 4D_1 f \cdot D_2 f \cdot g_2 + 3(D_2 f)^2.$$

25. Sea $\Omega = \mathbb{R}^2 - \{(x,0) : x \geq 0\}$. Sea $f : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que, para cada $(x,y) \in \Omega$,

$$D_1 f(x,y) = D_2 f(x,y) = 0.$$

Demostrar que, en estas condiciones, f es constante en Ω. Hallar una función $f : \Omega \to \mathbb{R}$ que no sea independiente de la segunda variable y tal que $D_2 f(x,y) = 0$ para cada $(x,y) \in \Omega$.

TEMA IV: Desarrollo de Taylor y cálculo de extremos

1. Estudiar si la función

$$f(x,y) = \begin{cases} x + xy^2 \sin \frac{1}{x^2+y^2} \ , \ (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 \ , \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   es $\mathcal{C}^1$ en algún entorno del origen.

2. Una función $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ tiene derivadas $D_{11}f$, $D_{22}f$, continuas. ¿Implica esto la continuidad de la derivada $D_{12}f$?.

3. **(Lema de Hadamard)** Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^1$. Probar que existen $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i \in \{1, ..., n\}$, tales que

$$f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^{n} x_i g_i(x).$$

4. Estudiar si la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2 \sin \frac{x}{y} \ , \ y \neq 0 \\ \\ 0 \ , \ y = 0, \end{cases}$$

   cumple las hipótesis del teorema de Young.

5. **(Teorema de Hefter-Young)** Sea $f : U \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con $(a,b) \in U$. Supongamos que f admite en U derivadas parciales D_1f, D_2f así como la derivada segunda $D_{12}f$ que, además, es continua en (a,b). Entonces, existe la derivada $D_{21}f(a,b)$ y se cumple que

$$D_{21}f(a,b) = D_{12}f(a,b).$$

6. Utilizar la fórmula de Taylor para desarrollar las siguientes funciones:

   a) $f(x,y) = x^3 + y^2 + xy^2$ en potencias de $(x-1)$ e $(y-2)$.
   b) $g(x,y) = \log(x+y)$, $x, y > 0$ en un entorno de $(1,1)$.
   c) $h(x,y,z) = \exp(a(x+y+z))$, $a \in \mathbb{R}^*$ en un entorno de $(0,0,0)$.

7. Demostrar que las funciones anteriores son analíticas, respectivamente, en los siguientes dominios:

   a) En todo $\mathbb{R}^2$.
   b) En $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0\}$
   c) En todo $\mathbb{R}^3$.

8. Calcular el desarrollo de Taylor de orden 1 (incluyendo el resto) de las funciones:

   a) $f(x, y) = \log(x + e^y)$ en $(1, 0)$.

   b) $g(x, y) = 1/xy$ en $(1, -1)$.

9. Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua, no negativa y tal que

$$\lim_{||x|| \to \infty} f(x) = 0.$$

   Entonces, f alcanza un máximo absoluto.

10. Sea $f(x, y) = (ax^2 + by^2) \exp(-(x^2 + y^2))$, con $a, b > 0$. Determinar si tiene extremos absolutos y, en caso afirmativo, calcularlos.

11. Estudiar los extremos de las siguientes funciones:

    a) $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

    b) $f(x, y) = \sin x + \sin y + \cos(x + y)$, $(x, y) \in]0, 2\pi[\times]0, 2\pi[$.

    c) $f(x, y) = (x + z^2) \exp(x(y^2 + z^2 + 1))$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

TEMA V: Funciones inversas e implícitas

1. Sea la función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $f(x, y, z) = (e^x, \sin(x + y), e^z)$.

   a) Probar que f es localmente invertible en $(0, 0, 0)$.

   b) Probar que existen puntos en $\mathbb{R}^3$ donde no se cumplen las hipótesis del teorema de la función inversa.

2. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + x^2 \sin \frac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ \\ 0 \text{ si } x = 0. \end{cases}$$

   Estudiar si g es localmente invertible en un entorno de 0.

3. Estudiar la existencia de inversa local de la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$ y decidir si existe inversa global.

4. Ídem para $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$.

5. Ídem para $f : A \to \mathbb{R}^2$ donde

$$f(x, y) = \big((x^2 + y^2)/2, (x^2 - y^2)/2\big)$$

   y $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$. Determinar, si existe, la función inversa.

6. Sea $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$g(x, y, z) = (e^{2y} + e^{2z}, e^{2x} - e^{2z}, x - y).$$

   a) Probar que g es diferenciable en $\mathbb{R}^3$ y posee inversa diferenciable en un entorno de cada punto.

   b) Probar que g no sólo es inyectiva localmente, sino también globalmente.

7. Se considera la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(u, v) = (e^u + e^v, e^u - e^v).$$

   Probar que f es localmente invertible en un entorno de cada punto $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. En este caso, demuéstrese que f también es invertible globalmente calculando su inversa. Comprobar que las matrices asociadas a las aplicaciones diferenciales de f y f^{-1} en puntos correspondientes son inversas una de la otra.

8. Sean $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ (con $n < m$) y $a \in \mathbb{R}^n$.

a) Si df_a es inyectiva, pruébese que existe un subconjunto abierto $A \subset \mathbb{R}^n$, con $a \in A$, tal que la restricción de f sobre A posee inversa.

b) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(x, y) = (x + y, x^2 - y, y^4).$$

1) Hállese un punto de $\mathbb{R}^2$ tal que, para cualquier entorno suyo, la restricción de f no tenga inversa.

2) Hállese un punto de $\mathbb{R}^2$ para el cual exista un entorno de modo que la restricción de f sea inyectiva.

c) Si $g(x, y) = (x + y, (x + y)^2, (x + y)^3)$, ¿para qué puntos $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ posee g función inversa en un entorno de $f(a, b)$?.

9. **(Estudio de las coordenadas polares en el plano)** Considérese la aplicación $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por las ecuaciones

$$x = \rho \cos\theta \ , \ y = \rho \sin\theta.$$

siendo $g_1 = x$, $g_2 = y$.

a) Probar que g *no* es un cambio de variable (transformación regular) en $\mathbb{R}^2$.

b) Determínese un abierto $A \subset \mathbb{R}^2$ tal que la restricción de g sobre A sea un cambio de variable y no exista ningún otro abierto $A' \subset A$ tal que g sea en A' una aplicación regular.

c) Demostrar que la expresión del Laplaciano (dado aquí en cartesianas)

$$\triangle f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y),$$

con $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$, en coordenadas polares es

$$\triangle f(\rho, \theta) = \frac{\partial^2 f^*}{\partial \rho^2}(\rho, \theta) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f^*}{\partial \rho}(\rho, \theta) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f^*}{\partial \theta^2}(\rho, \theta),$$

siendo

$$f^*(\rho, \theta) = f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta).$$

10. **(Método de las características en EDP)** Sea la ecuación en derivadas parciales (llamada ecuación de ondas)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0,$$

donde $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $v \in \mathbb{R}$ es una constante (la velocidad de propagación de la onda).

a) Compruébese que la aplicación $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por las ecuaciones

$$\zeta = x + vt \ , \ \eta = x - vt$$

es una aplicación regular en $\mathbb{R}^2$.

b) Efectuar el cambio de variable anterior en la ecuación y resolverla.

11. Comprobar que la ecuación

$$x^2 + xy + y^3 - 11 = 0$$

define a y como función implícita de x en un entorno del punto $x = \frac{\pi}{2}$, en el cual toma el valor $y = \frac{\pi}{2}$. Calcular las derivadas primera y segunda de dicha función implícita en $x = \frac{\pi}{2}$.

12. **(Estudio de curvas algebraicas I)** Comprobar que la ecuación

$$x^2 + xy + y^3 - 11 = 0$$

define a y como función implícita de x en un entorno del punto $x = 1$ con el valor $y = 2$. Calcular las derivadas primera y segunda de dicha función implícita en 1.

13. **(Estudio de curvas algebraicas II)** Estudiar la existencia de funciones implícitas $y = \phi(x)$ definidas por la ecuación

$$y(x^2 - y^2) - x^4 = 0$$

en un entorno del punto $x = 0$, con el valor $\phi(0) = 0$.

14. **(Estudio de curvas algebraicas III)** Ídem para la ecuación

$$y^2 - x^2 + x^3 - y^3 + 2y^4 = 0$$

en un entorno del punto $x = 0$, con el valor $\phi(0) = 0$.

15. **(Estudio particular de la Lemniscata de Bernouili)** Se considera la ecuación

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0 \ , \text{ con } a > 0.$$

Determinar los puntos en los cuales la ecuación *no* definde a una de las variables como función implícita de la otra. Detyerminar aquellos puntos en los que y es función implícita de x y calcular en ellos $\frac{dy}{dx}$.

16. **(Estudio de sistemas no lineales sobredeterminados I)** Comprobar que el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y - 2xz = 0 \end{cases}$$

define a (x, y) como funciones implícitas de z en un entorno del punto $z = 0$, con los valores $(x, y) = (0, 0)$. Calcular las derivadas primeras y segundas de las funciones implícitas en $z = 0$.

17. **(Estudio de sistemas no lineales sobredeterminados II)** Comprobar que el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x^2 + y - z^2 - w^2 = 0 \\ x^2 - y - z^2 - w = 0 \end{cases}$$

define a (z, w) como funciones implícitas de (x, y) en un entorno del punto $(x, y) = (2, 1)$ con los valores $(z, w) = (1, 2)$. Calcular las derivadas parciales $D_x z$, $D_y z$, $D_x w$, $D_y w$, $D_{xy} z$ en dicho punto.

18. **(Estudio de sistemas no lineales sobredeterminados III)** El sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z + w - 3 = 0 \\ xy + zw + 1 = 0, \end{cases} ,$$

¿define a (z, w) como funciones implícitas de (x, y) en algún entorno del punto $(x, y) = (1, 0)$ con el valor en este punto $(z, w) = (-1, 1)$?.