VARIABLE COMPLEJA I

Profesor: José A. Vallejo

22 de agosto de 2007

TEMA I: Problemas

1. Sean $z, w \in \mathbb{C}$ con $w \neq 0$. Demostrar que $|z+w| = |z| + |w|$ si y sólo si $z/w \in \mathbb{R}$ y $z/w \geq 0$.

2. Demostrar que no puede definirse una buena ordenación sobre todo el plano complejo $\mathbb{C}$.

3. Expresar los siguientes números complejos en la forma $x + iy$:

   a) $(1+2i)^3$
   b) $\frac{5}{-3+4i}$
   c) $\left(\frac{2+i}{3-2i}\right)^2$
   d) $i^5 + i^{16}$
   e) $\frac{1+i}{1+i^{-8}}$
   f) $(1+i)^n - (1-i)^n$
   g) $\sum_{k=1}^{100} i^k$.

4. Probar que

   a) $|z+1| > |z-1|$ si y sólo si $Re z > 0$.
   b) $Im z > 0$ e $Im w > 0$ implican que $\left|\frac{z-w}{z-\overline{w}}\right| < 1$.
   c) $|z-w|^2 \leq (1+|z|^2)(1+|w|^2)$.

5. Sean $z, w \in \mathbb{C}$. Demostrar que

$$|1-\overline{z}w|^2 - |z-w|^2 = (1-|z|^2)(1-|w|^2)$$

   y deducir que

   a) $|z| < 1, |w| < 1 \Rightarrow \left|\frac{z-w}{1-\overline{z}w}\right| < 1$.
   b) $|1-\overline{z}w| = |z-w| \iff |z| = 1$ ó $|w| = 1$.

6. Probar la ley del paralelogramo: $\forall z, w \in \mathbb{C}$,

$$|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2).$$

7. Sean $a, b, c \in \mathbb{C}$ tales que $|z| = 1$. Probar que $\left|\frac{az+b}{\overline{b}z+\overline{a}}\right| = 1$.

8. Sea $P(z)$ un polinomio con coeficientes complejos, esto es, $P(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j$, y sea $\overline{P}(z) = \sum_{j=0}^{n} \overline{a}_j z^j$. Probar que

   a) $\overline{P}(\overline{z}) = \overline{P(z)}$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

   b) Si $a_j \in \mathbb{R}$ para todo j y z_0 es una raíz de $P(z)$, entonces $\overline{z}_0$ también lo es.

9. Aplicar las fórmulas de DeMoivre con el fin de obtener expresiones para $\cos 5t$ y $\sin 5t$ en función de $\cos t$ y $\sin t$.

10. Probar la "identidad trigonométrica de Lagrange"

$$1 + \cos t + \cos 2t + \cdots + \cos nt = \frac{1}{2} + \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}$$

    para $\sin\frac{t}{2} \neq 0$.

11. Calcular las siguientes expresiones

    a) $\sqrt[3]{2+2i}$

    b) $\sqrt[4]{i}$

    c) $\sqrt[4]{\sqrt{3}+3i}$

    d) $\sqrt[3]{-1}$.

12. Resolver la ecuación $\overline{z} = z^{n-1}$, siendo $n \in \mathbb{N}$ y $n \neq 2$.

13. Determinar los valores $x, y \in \mathbb{R}$ que satisfacen la igualdad $x+iy = (x-iy)^2$.

14. Probar que las raíces $n-$simas de la unidad distintas de 1 satisfacen la ecuación

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = 0.$$

15. Dados $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, con $z_1 \neq z_2$, escribir el conjunto de los números complejos que verifican $|z - z_1| = |z - z_2|$.

16. Escribir las ecuaciones de una recta, una circunferencia y una elipse en términos de z y $\overline{z}$.

17. Demostrar que si $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ y $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$, los tres puntos son los vértices de un triángulo equilátero inscrito en la circunferencia unidad.

18. Encontrar los vértices de un polígono regular de n lados si su centro se encuentra en 0 y uno de sus vértices es un complejo conocido z_1.

19. Mostrar que z_1, z_2, z_3 están sobre una misma recta si y sólo si

$$\frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3} \in \mathbb{R}.$$