# VARIABLE COMPLEJA I

Profesor: José A. Vallejo

10 de septiembre de 2007

## TEMA II: Problemas

1. Estudiar geométricamente la función $f : \mathbb{C} - \{0\} \to \mathbb{C}$ definida por
$$f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right).$$

2. Comprobar que la función $f : \mathbb{C} - \{\frac{1}{3}\} \to \mathbb{C}$ definida por
$$f(z) = \frac{2z-1}{3z+1}$$
transforma el semiplano superior $Imz > 0$ en si mismo.

3. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $f(x+iy) = \cos x + i \sin y$. ¿En qué curvas transforma $f$ las rectas $Rez = a$ e $Imz = b$ con $a, b$ constantes?.

4. Demostrar que las siguientes funciones transforman circunferencias y rectas en circunferencias y rectas, respectivamente.

   *a*) $f(z) = z + b$, con $b \in \mathbb{C}$ (traslaciones).
   *b*) $f(z) = az$, donde $a > 0$ (dilataciones).
   *c*) $f(z) = az$, donde $|a| = 1$ (rotaciones).
   *d*) $f(z) = 1/z$, donde $z \neq 0$ (inversión).
   *e*) $f(z) = \overline{z}$ (simetría).

5. Se dice que una función $f$ es una transformación de Möbius si
$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d},$$
donde $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ y $ad - bc \neq 0$ (si $c \neq 0$, $f$ está definida en $\mathbb{C} - \{-\frac{d}{c}\}$).

   *a*) Expresar una transformación arbitraria de Möbius como composición de traslaciones, dilataciones, rotaciones e inversiones.

*b*) Demostrar que toda transformación de Möbius transforma circunferencias y rectas en circunferencias y rectas, respectivamente.

*c*) Demostrar que toda transformación de Möbius es inyectiva y su inversa es una transformación de Möbius.

*d*) Demostrar que la composición de transformaciones de Möbius es también una transformación de Möbius.

Las propiedades precedentes afirman que las transformaciones de Möbius forman un grupo, que se suele denotar $PSL(2,\mathbb{C})$. El motivo es que resulta ser la proyectivización del grupo especial lineal $SL(2,\mathbb{C})$ (es el cociente sobre su centro). El grupo $PSL(2,\mathbb{C})$ juega un papel fundamental en muchas ramas de las matemáticas, notablemente en geometría hiperbólica.

6. Comprobar que la función definida por

$$f(z) = \frac{z}{1-z}$$

transforma el círculo $|z| < 1$ sobre el semiplano $Ref(z) > -\frac{1}{2}$.

7. Averiguar en qué puntos es derivable compleja la función definida por $f(x+iy) = (x^2 - y^2) + i2xy$.

8. Ídem para la función $f(x+iy) = (x^2 - 3) + i(y^2 + 2x)$.

9. Probar que toda transformación de Möbius es derivable compleja y su derivada no se anula nunca.

10. Estudiar para qué valores son diferenciables reales y para qué valores son derivables complejas las siguientes funciones.

    *a*) $f(x+iy) = x$.

    *b*) $f(x+iy) = y$.

    *c*) $f(x+iy) = x^2 + y^2$.

11. Demostrar que la función conjugación compleja $f(z) = \overline{z}$ es diferenciable real en todo punto, pero no es derivable compleja en ninguno.

12. Si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es una función derivable compleja en todo punto, demostrar que existe $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ derivable compleja tal que $\overline{g(z)} = f(\overline{z})$.

13. Probar que las siguientes funciones cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en el punto $(0,0)$ pero no son derivables complejas.

    *a*)
$$f(x+iy) = \begin{cases} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} + i\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} \text{ si } x+iy \neq 0 \\ \\ 0 \text{ si } x+iy = 0 \end{cases}$$

*b*)

$$f(z) = \begin{cases} \frac{z^5}{|z^4|} \text{ si } z \neq 0 \\ \\ 0 \text{ si } z = 0 \end{cases}$$

*c*)

$$f(x+iy) = \sqrt{|x||y|}$$

14. Estudiar en qué puntos las siguientes funciones son derivables y calcular sus derivadas.

    *a*) $f(x+iy) = x^2 + iy^2$.
    *b*) $f(x+iy) = x^2 + 2x - iy$.
    *c*) $f(x+iy) = 2xy + i(x + \frac{2}{3}y^3)$.

15. Calcular los valores que deben tomar $a, b, c \in \mathbb{R}$ para que la función $f$ sea derivable en $\mathbb{C}$.

    *a*) $f(x+iy) = x + ay + i(bx + cy)$
    *b*) $f(x+iy) = \cos x(\cosh y + a \sinh y) + i \sin x(\cosh y + b \sinh y)$.

16. (Teorema del valor medio para funciones complejas) Probar que para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ se cumple $|\lambda + i(1-\lambda)| \geq \frac{1}{2}$. Deducir que si $f(z) = z^3$ no existe $\eta \in [1, i]$ tal que $f(i) - f(1) = (i-1)f'(\eta)$.

17. Sean $D \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo y $f : D \to \mathbb{C}$ una función derivable en $D$.

    *a*) Demostrar que si $f'(z) = 0$ para todo $z \in D$, entonces, $f$ es constante.
    *b*) Probar que si para un $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $f^{(n+1)}(z) = 0$ para todo $z \in D$, entonces $f$ es un polinomio de grado menor o igual que $n$.

18. Sea $f : D \to \mathbb{C}$ derivable en $z \in D$, con $f'(z) \neq 0$.

    *a*) Probar que $f$ preserva el ángulo entre dos arcos diferenciables que pasan por $z$.
    *b*) Probar que $\overline{f}$ preserva la magnitud del ángulo entre dos arcos direferenciables que pasan por $z$, pero invierte la orientación.

19. Sean $D \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo y $f : D \to \mathbb{C}$ uan función derivable en $D$, con $u = Ref$, $v = Imf$. Probar que $f$es constante en $D$ si se cumple una de las siguientes condiciones.

    *a*) $v(x,y) = u(x,y)^2$, para todo $z = x + iy \in D$.
    *b*) $u(x,y)^2 + v(x,y)^2 = cte$ para todo $z = x + iy \in D$.
    *c*) Existen $a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$ tales que $au(x,y)^2 + bv(x,y)^2 = cte$ para todo $z = x + iy \in D$.

20. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ de la forma $f(x + iy) = u(x) + iv(y)$. Probar que $f$ es derivable en $\mathbb{C}$ si y sólo si existen $\lambda \in \mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{C}$ tales que $f(z) = \lambda z + c$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

21. Sea $f : D \to \mathbb{C}$ con $D$ abierto conexo. Demostrar que si $f$ es derivable en $D$ y $D_1 u + D_2 v = 0$ para todo $x + iy \in D$, entonces $f'$ es constante.

22. Demostrar que una función derivable en un abierto conexo $D$ y cuyos valores son reales, se reduce a una constante.