VARIABLE COMPLEJA I

Profesor: José A. Vallejo

8 de octubre de 2007

TEMA III: Problemas

Todos los índices en $\sum$ se entienden de $n = 0$ a $+\infty$ si no se indica expresamente lo contrario.

1. Determinar el radio de convergencia de

$$\sum n! z^{n^2}$$

2. Calcular el radio de convergencia de las siguientes series:

   a) $\sum_{n=2}^{\infty} n^{\lg n}$

   b) $\sum \frac{n^n}{n!} z^n$

   c) $\sum a^{n^2} z^{1+2+\cdots+n}$, con $a \in \mathbb{R}$

   d) $\sum 2^n z^{n!}$

   e) $\sum (\sin n) z^n$

   f) $\sum \left(\begin{array}{c} n+a \\ n \end{array} \right) z^n$, con $a \in \mathbb{N}$

   g) $\sum a_n z^n$ siendo

$$a_n = \begin{cases} 1/m^2 \text{ si } n = 3m \\ 2m/(m+1) \text{ si } n = 3m+1 \\ m^4 \text{ si } n = 3m+2 \end{cases}$$

3. Estudiar el comportamiento de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

sobre la frontera del disco de convergencia.

4. Estudiar el comportamiento sobre la frontera del disco de convergencia de las siguientes series:

   a) $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$
   b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$
   c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{n}$
   d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{pn}}{n}$ con $p \in \mathbb{N}$

5. Calcular el desarrollo en serie de potencias centrada en 0 de

$$\frac{z}{(1-z)^2}$$

Para el estudio de series de potencias correspondientes a funciones más complicadas, resulta de utilidad el siguiente resultado (que probaremos más adelante en el curso), conocido como Teorema de Mertens:

Teorema: Sean $A(z) = \sum a_n(z-z_0)^n$, $B(z) = \sum b_n(z-z_0)^n$ dos series de potencias con radios de convergencia respectivos R_1 y R_2. Entonces, $A(z)B(z)$ define una serie de potencias $A(z)B(z) = C(z) = \sum c_n(z-z_0)^n$, siendo

$$c_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_{n-k},$$

y la cual converge en el recinto $|z-a| < \text{mín}\{R_1, R_2\}$.

6. Calcular la serie de potencias centrada en 0 de

$$\frac{z}{z^2 - 4z + 3}$$

7. Calcular el desarrollo en series de potencias centradas en 0 de

   a) $\frac{1}{(1-z)^{k+1}}$, $k \in \mathbb{N}$
   b) $\frac{z(1+z)}{(1-z)^3}$
   c) $\frac{z}{z^2-4z+13}$
   d) $\frac{1}{1-z+z^2}$

8. Calcular el desarrollo en serie de potencias centrada en 1 (y determinar su radio de convergencia) para la función

$$\frac{z^2}{(z+1)^2}$$

Una interesante aplicación de los desarrollos en serie de potencias, se da en el siguiente ejercicio.

9. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

   a) $(1 - z^2)f''(z) - 4zf'(z) - 2f(z) = 0$, con las condiciones iniciales $f(0) = f'(0) = 1$.

   b) $(1 - z)zf'(z) - f(z) = 0$, con la condición inicial $f(0) = 0$.