VARIABLE COMPLEJA I

Profesor: José A. Vallejo

11 de noviembre de 2007

TEMA IV: Problemas

1. Dadas las funciones hiperbólicas
$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \ , \ \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2},$$
calcular su desarrollo en serie de potencias centrado en 0.

2. Determinar las series de Taylor para las funciones $\sin z$ y $\cos z$ en $\frac{\pi}{4}$.

3. Calcular la serie de Taylor centrada en 0 de la función
$$(z+a)^\beta = e^{\beta L(z+a)},$$
donde L es una rama continua del logaritmo y $a \neq 0$. Determinar su radio de convergencia.

4. Demostrar que no existe ninguna g continua en $\mathbb{C} - \{0\}$ tal que
$$e^{g(z)} = z^2.$$

5. Estudiar la relación entre los conjuntos $z^{2\alpha}$, $(z^\alpha)^2$, $(z^2)^\alpha$. Estudiar también la relación entre las determinaciones continuas de $z^{2\alpha}$, $(z^\alpha)^2$, $(z^2)^\alpha$.

6. Calcular las derivadas, donde existan, de z^α y z^z.

7. Resolver la ecuación $\cos z = 4$.

8. Estudiar la relación entre los conjuntos $\log(z_1 z_2)$ y $\log z_1 + \log z_2$. Estudiar también la relación entre $L(z_1 z_2)$ y $L(z_1) + L(z_2)$ donde L es una determinación continua del logaritmo.

9. Demostrar que
$$\frac{1}{\cos z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{E_{2n}}{2n!} z^{2n},$$
donde E_n viene dado por la expresión recurrente $E_0 = 1$ y:
$$\binom{2n}{0} E_0 + \binom{2n}{2} E_2 + \cdots + \binom{2n}{2n} E_{2n} = 0.$$