

# VARIABLE COMPLEJA I

Profesor: José A. Vallejo

17 de noviembre de 2007

## TEMA VI: Problemas

1. Calcular  $\int_{\gamma} f$  siendo  $\gamma(t) = e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$  y

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2}.$$

2. Calcular  $\int_{\gamma} f$  siendo

a)  $\gamma(t) = e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$  y

$$f(z) = \frac{(e^z - e^{-z})}{z^n}, n \in \mathbb{N}.$$

b)  $\gamma(t) = e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$  y

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^3}.$$

3. Sea  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ , con  $U$  abierto,  $f$  holomorfa en  $U$ . Sea  $z_0 \in U$  tal que  $f'(z_0) \neq 0$ . Probar que existe un  $R > 0$  tal que si  $0 < r < R$  se tiene:

$$\frac{1}{f'(z_0)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(z_0)} \frac{dz}{f(z) - f(z_0)}.$$

4. Sea  $P(z)$  un polinomio de grado  $n$ , sea  $R > 0$  suficientemente grande como para que  $P(z)$  no se anule en  $\{z \in \mathbb{C} : |z| \geq R\}$ . Sea también  $C_R(0) = \{Re^{it} : t \in [0, 2\pi]\}$ . Probar que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_R(0)} \frac{P'(z)}{P(z)} dz = n.$$

5. Sea  $f : B_r(0) \rightarrow \mathbb{C}$ , con  $r > 0$ , una función continua y par. Probar que

$$\int_{\gamma} f = 0$$

para todo  $\gamma(t) = se^{it}$ , con  $t \in [0, 2\pi]$  y  $0 < s < r$ .

6. Calcular

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t}$$

*Sugerencia:* relacionar la integral propuesta con la de  $1/z$  siendo  $\gamma(t) = a \cos t + ib \sin t$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ ,  $a, b > 0$ .