Integrales de línea. Teorema de Green

José Antonio Vallejo
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias
Universidad Autónoma de San Luis Potosí
email: jvallejo@fciencias.uaslp.mx

16 Noviembre 2007

1. Curvas parametrizadas

A menudo nos interesará ver una cierta gráfica como si fuese el rastro que deja un móvil que se desplaza por el plano. Esto lo podemos hacer mediante las llamadas curvas parametrizadas.

Definición 1 *Una curva parametrizada en el plano es un par de ecuaciones*

$$C \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = f(t) \\ y = g(t) \end{array} \right. , t \in [a, b]. \tag{1}$$

A t se le llama parámetro de la curva, y resulta útil pensar en el como en el tiempo.

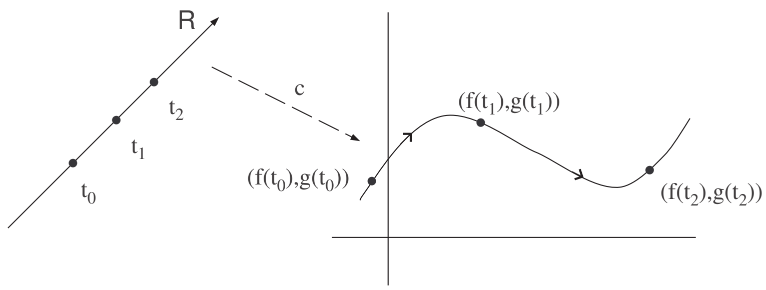

Figura 1: Una curva parametrizada

Nota 1 *Es importante especificar el intervalo de definición del parámetro, pues en caso contrario nos restringiremos a una región u otra de la curva. Cuando no digamos nada, entenderemos que el parámetro puede tomar cualquier valor real para el que estén definidas $f(t)$ y $g(t)$.*

Entonces, en cada instante la partícula móvil tendrá unas coordenadas $(x, y) = (f(t), g(t))$. Observemos que a medida que vamos tomando t mayores, nos vamos desplazando según un cierto sentido sobre la curva C. Este sentido de recorrido se llama orientación de la curva C.

Ejemplo 1 *Consideremos la curva parametrizada C dada por las ecuaciones*

$$C \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \end{array} \right. , t \in [0, 2\pi]. \tag{2}$$

Podemos hacernos una idea de su forma dando valores al parámetro t. Obtenemos así una tabla como la siguiente:

t	(x, y)
0	$(2, 0)$
$\pi/4$	$(\sqrt{2}, \sqrt{2})$
$\pi/2$	$(0, 2)$
$3\pi/4$	$(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$
π	$(-2, 0)$

y, si vamos representando las parejas de valores (x, y) resulta:

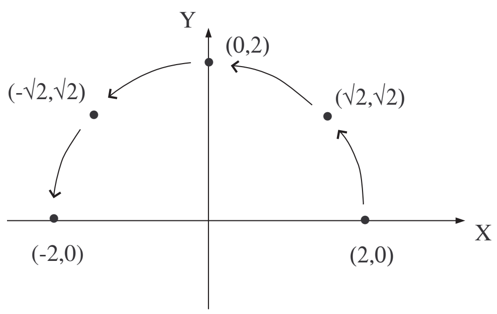

Figura 2: Una curva orientada

Nótese como hemos indicado la orientación de la curva, mediante flechas que determinan el sentido de recorrido. Si representamos suficientes punetos, veremos que la gráfica es la de una circunferencia de radio 2, recorrida en sentido antihorario (por convenio, el sentido antihorario se dice que es positivo, véase la figura 3).

En este ejemplo, podríamos haber reconocido que la curva es una circunferencia sin más que eliminar el parámetro t para obtener una ecuación de la forma $y = y(x)$. En este caso, elevando al cuadrado las expresiones (2) para x, y y sumando:

$$x^2 + y^2 = 4\cos^2 t + 4\sin^2 t = 4.$$

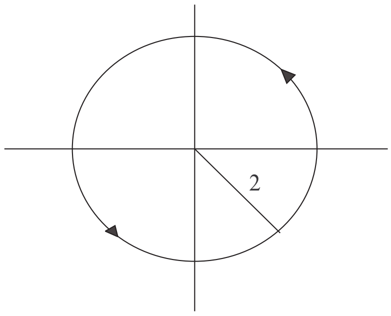

Figura 3: Circunferencia de radio 2

Ejemplo 2 *En la curva parametrizada con parámetro* θ

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 3\sec\theta \\ y = 2\tan\theta \end{array} \right. , \theta \in [0, 2\pi],$$

podemos eliminar el parámetro de la siguiente forma: tenemos que $x = 3\sec\theta = 3/\cos t$*, o sea,* $\cos\theta = 3/x$*. De aquí,*

$$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\frac{9}{x^2}}.$$

Una vez que tenemos $\sin\theta, \cos\theta$ *en términos de* x*, podemos sustituir en la expressión de* y*:*

$$y = 2\tan\theta = 2\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{2}{3}x\sqrt{1-\frac{9}{x^2}},$$

o bien, elevando al cuadrado:

$$y^2 - \frac{4}{9}x^2 = 1.$$

Este proceso no es posible en todos los casos; no siempre se puede despejar el parámetro para obtener una ecuación $y = y(x)$. En otras palabras: no toda curva parametrizada C es globalmente el gráfico de una función $y = y(x)$. Como ejemplo tenemos la curva de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{e^t}{\cos t} \\ \\ y = t^2 \sin t \end{array} \right. .$$

Nota 2 *Lo que sí se puede hacer siempre es escribir una función arbitraria* $y = y(x)$ *como una curva parametrizada. Sólo hay que poner*

$$\left\{ \begin{array}{l} x = t \\ y = y(t) \end{array} \right. .$$

Ejemplo 3 *Consideremos la parábola* $4x^2 + y = 4$. *De la ecuación resulta* $y = 4(1 - x^2)$ *y, según acabamos de decir, una parametrización sería*

$$\begin{cases} x = t \\ y = 4(1 - t^2) \end{cases}.$$

Problemas Sección 1

En los siguientes ejercicios, eliminar t de las curvas parametrizadas que se proponen. Representar la curva y determinar su orientación.

1. $\begin{cases} x = t - 1 \\ y = t^3 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x = t - 1 \\ y = t(t + 4) \end{cases}$

3. $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$

4. $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$

5. $\begin{cases} x = \sin t \\ y = \cot s \end{cases}$

   Solución: (1) $y = (x + 1)^3$, (2) $y = x^2 + 2x - 3$, (3) $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$, (4) $\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} = 1$, (5) $4y^4 - 4y^2 + x^2 = 0$.

2. Integrales de línea de campos escalares

Supongamos una función definida el el plano, $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, que denotaremos $F(x, y)$, y una curva parametrizada C, dada por las ecuaciones (1).

Definición 2 *A una función como* $F(x, y)$ *se la llama campo escalar, porque se puede pensar que nos dice, para cada punto* (x, y) *del plano, cuál es el valor de una magnitud numérica (o escalar) definida sobre el plano. Por ejemplo, podría darnos la temperatura en cada punto de una plancha metálica.*

Definición 3 *Se llama integral de línea del campo* $F(x, y)$ *a lo largo de la curva* C, *entre los puntos* $P = (x_P, y_P)$ *y* $Q = (x_Q, y_Q)$, *y se denota por* $\int_C F(s) \cdot ds$, *a la integral de una variable dada por*

$$\boxed{\int_{t_P}^{t_Q} F(f(t), g(t))\sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2}dt.} \tag{3}$$

En esta expresión, t_P *y* t_Q *son los valores del parámetro* t *para los cuales la curva pasa por* $P = (x_P, y_P)$ *y* $Q = (x_Q, y_Q)$, *respectivamente.*

Nota 3 *[importante] Si cambiamos la orientación de C, la integral (3) cambia de signo, ya que $\int_{t_Q}^{t_P} = -\int_{t_P}^{t_Q}$.*

Fijémonos en que si la curva C pasara por alguno de estos puntos para más de un instante t, no sabríamos cual de esos instantes tomar para calcular la integral. Por eso, supondremos que las curvas parametrizadas con las que trabajaremos no tienen autonintersecciones (se dice a veces que son curvas simples). Por ejemplo, una circunferencia

$$C \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = \cos t \\ y = \sin t \end{array} \right. , t \in [0, 2\pi],$$

no tiene autointersecciones, pero la curva (que tiene la gráfica de un 8)

$$C \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = \sin 2t \\ y = \cot s \end{array} \right. , t \in [0, 2\pi],$$

tiene una autointersección en $(x, y) = (0, 0)$ (pasa por este punto para los valores $t = \frac{\pi}{2}$ y $t = \frac{3\pi}{2}$).

Ejemplo 4 *Vamos a evaluar la integral de línea del campo $F(x, y) = \frac{x^3}{y}$ a lo largo de la parábola $y = \frac{x^2}{2}$ entre los puntos $(0, 0)$ y $(2, 2)$. Lo primero que hay que hacer es parametrizar la parábola; recordando la nota 2, es fácil hacer*

$$C \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = t \\ y = \frac{t^2}{2} \end{array} \right. ,$$

es decir, tomar $f(t) = t$ y $g(t) = \frac{t^2}{2}$. Los valores del parámetro t para los cuales la parábola pasa por $(0, 0)$ y $(2, 2)$ son, respectivamente, $t = 0$ y $t = 2$. Ahora, ya podemos aplicar la fórmula (3); lo que queremos calcular es

$$\int_{t=0}^{t=2} F(t, \frac{t^2}{2}) \sqrt{1 + t^2} dt = \int_0^2 \frac{t^3}{\frac{t^2}{2}} \sqrt{1 + t^2} dt = \int_0^2 2t \sqrt{1 + t^2} dt,$$

o sea:

$$\int_C F(s) \cdot ds = \frac{2}{3} (1 + t^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^2 = \frac{2}{3} (\sqrt{75} - 1).$$

Un tipo de problema muy interesante al que se aplica el concepto de integral de línea, es el de la determinación de masas (o cargas) conocida la densidad.

Ejemplo 5 *Un alambre tiene la forma de una semicircunferencia de radio a. La densidad lineal de masa en un punto P es directamente proporcional a la distancia de P a la recta que pasa por los extremos del alambre, y queremos determinar cuál es la masa total. El primer paso consiste en situar el alambre en un sistema coordenado sobre el plano, como en la figura:*

Ahora, observemos que la densidad puede interpretarse como un campo escalar: lo que nos dicen es que en cada punto $P = (x, y)$ de la curva que describe el alambre, la densidad es

$$\lambda(x, y) = ky$$

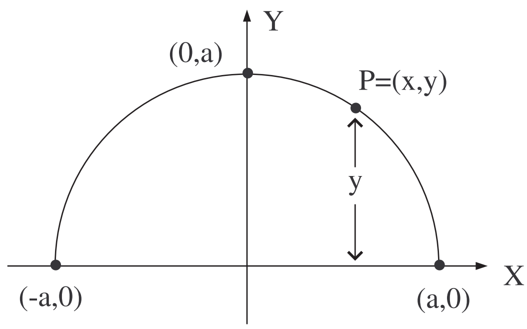

Figura 4: Curva del alambre

(donde k es la constante de proporcionalidad), ya que y es la distancia de P a la recta que pasa por los extremos. Calcular la masa total equivale a sumar la densidad sobre todos los puntos de la curva, y así lo que queremos calcular es $m = \int_C \lambda(s)ds$, donde C es la curva que describe el alambre, la semicircunferencia de radio a. Una parametrización para C es:

$$C \equiv \begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi].$$

Esta parametrización tiene orientación antihoraria, es decir, comienza en $(a, 0)$ para $t = 0$ y pasa por $(-a, 0)$ en $t = \pi$.
Aplicando la definición de integral de línea:

$$\begin{aligned} m = \int_C \lambda(s)ds &= \int_0^\pi ka\sin t\sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t}dt \\ &= ka^2 \int_0^\pi \sin t dt = -ka^2 \left.(\cos t)\right|_0^\pi = 2ka^2. \end{aligned}$$

Problemas Sección 2

1. Calcular la integral de línea del campo $F(x, y) = xy^2$ a lo largo de la curva

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi].$$

   Solución: 1/3.

2. Dado el campo escalar $f(x, y) = 2xy$, calcular su integral a lo largo del cuadrante de elipse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ desde el punto $(3, 0)$ al $(0, 2)$.
   Solución: 76/5.

3. Calcular la masa de un alambre con densidad lineal $f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{2}}xy + y - z$, definido por las ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{l} y = x \\ z = \frac{x^2}{\sqrt{2}} \end{array} \right.$$

desde el punto $(0,0,0)$ hasta el punto $\left(1, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.Solución: $(4-\sqrt{2})/3$.

4. Calcular la carga total de un alambre cuya forma sigue la curva $y = x^2$ desde el punto $(0,0)$ hasta el punto $(2,4)$, si la densidad de carga en cada punto viene dada por $f(x,y) = x$.

   Solución: $(17^{3/2} - 1)/12$.

3. Integrales de línea de campos vectoriales

Definición 4 *Una aplicación diferenciable* $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *se dice que es un campo vectorial* $n-$*dimensional. Usualmente, trabajaremos con los casos* $n = 2, 3$.

Intuitivamente, un campo F asigna un vector (de $\mathbb{R}^n$) a cada punto de $\mathbb{R}^n$ de manera que la orientación de esos vectores no sufre variaciones bruscas.

Nota 4 *Por simplicidad, describiremos al situación en la que* $n = 2$. *Más adelante veremos ejemplos del caso* $n = 3$.

Escribiremos la acción del campo F como $F(x,y) = F_1(x,y)\mathbf{i} + F_2(x,y)\mathbf{j}$ o como $F(x,y) = (F_1(x,y), F_2(x,y))$, indistintamente. Ahora, como pasaba con las integrales de camos escalares, dada una curva parametrizada

$$C \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = f(t) \\ y = g(t) \end{array} \right. , t \in [a,b], \qquad (4)$$

podemos considerar la integral de F a lo largo de C.

Definición 5 *Se llama integral de línea del campo* $F(x,y)$ *a lo largo de la curva* C, *entre los puntos* $P = (x_P, y_P)$ *y* $Q = (x_Q, y_Q)$, *a la integral*

$$\boxed{\int_{t_P}^{t_Q} F_1(x,y)dx + \int_{t_P}^{t_Q} F_2(x,y)dy.} \qquad (5)$$

Por brevedad, la integral anterior se denota simplemente por

$$\int_C F_1(x,y)dx + F_2(x,y)dy.$$

Nuevamente, t_P y t_Q son los valores del parámetro t para los cuales la curva pasa por $P=(x_P,y_P)$ y $Q=(x_Q,y_Q)$, respectivamente.
Observemos que las integrales de (5) tienen los extremos expresados en función del parámetro t. Por tanto, habrá que hacer un cambio de variable para convertir dx y dy en dt. La táctica para conseguirlo, es la misma que se emplea en los cambios de variable de las integrales usuales: diferenciando las ecuaciones paramétricas de C (4) para obtener dx y dy en función de dt,

$$\left\{\begin{array}{l} dx = f'(t)dt \\ dy = g'(t)dt \end{array}\right. . \tag{6}$$

Ejemplo 6 *Evaluemos la integral de línea del campo* $F(x,y)=(xy,x^2)$ *a lo largo de la curva* C *con ecuaciones paramétricas*

$$C \equiv \left\{\begin{array}{l} x = 3t-1 \\ y = 3t^2-2t \end{array}\right. , t \in [1, \frac{5}{3}].$$

En este caso, tenemos que

$$F_1(x,y)=xy, F_2(x,y)=x^2,$$

y, por tanto, lo que queremos es $\int_C xydx + x^2dy$. *De las ecuaciones de* C, *resulta (véase la (6)):*

$$\begin{aligned} dx &= (3t-1)'dt = 3dt \\ dy &= (3t^2-2t)'dt = (6t-2)dt, \end{aligned}$$

y sustuyendo:

$$\begin{aligned} \int_C xydx + x^2dy &= \int_1^{5/3} ((3t-1)(3t^2-2t)3t + (3t-1)^2(6t-2))dt \\ &= \int_1^{5/3} (81t^3 - 81t^2 + 24t - 2)dt = 58. \end{aligned}$$

Nota 5 *La interpretación física de la integral* $\int_C F_1(x,y)dx + F_2(x,y)dy$ *es la del trabajo que realiza el campo vectorial* $F(x,y)=(F_1(x,y),F_2(x,y))$ *cuando una partícula se desplaza desde el punto* P *al* Q *siguiendo la trayectoria* C.

Naturalmente, el caso de las integrales de campos tridimensionales $F(x,y,z) = (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z))$ se hace de manera anàloga.

Ejemplo 7 *Calculemos el trabajo ejercido por el campo*

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (3x-2y, y+2z, -x^2)$$

sobre una partícula que se mueve según la curva parametrizada en el espacio

$$C \equiv \left\{\begin{array}{l} x = z^2 \\ z = y^2 \end{array}\right. , \tag{7}$$

desde el punto $(0,0,0)$ *hasta el* $(1,1,1)$. *Primeramente, identifiquemos las componentes del campo* F. *Son:*

$$F_1(x,y,z) = 3x - 2y, F_2(x,y,z) = y + 2z, F_3(x,y,z) = -x^2.$$

A continuación, analizemos la parametritzación de la curva C. *En principio, necesitamos* 3 *ecuaciones del tipo*

$$C \equiv \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases},$$

y en (7) aparentemente no hay nada de esto. Pero si nos fijamos, nos daremos cuenta de que la variable y *puede variar libremente, de manera que podemos tomar*

$$y = t.$$

Con esto, la ecuación para z *pasa a ser*

$$z = t^2,$$

y como x *se obtiene elevando al cuadrado la* z,

$$x = t^4.$$

Es decir, nuestra curva es

$$C \equiv \begin{cases} x = t^4 \\ y = t \\ z = t^2 \end{cases}. \tag{8}$$

Ahora, determinemos los valores del parámetro t *para los cuales la curva pasa por* $(0,0,0)$ *y* $(1,1,1)$. *Claramente, estos valores son* $t = 0$ *y* $t = 1$, *respectivamente. El trabajo* W *que queremos calcular no es más que la integral*

$$W = \int_C F_1(x,y,z)dx + F_2(x,y,z)dy + F_3(x,y,z)dz.$$

Diferenciando en (8) podemos expresar dx, dy *y* dz *en función de* dt:

$$\begin{aligned} dx &= 4t^3 dt \\ dy &= dt \\ dz &= 2tdt. \end{aligned}$$

Y ya tenemos todo lo que necesitamos:

$$\begin{aligned} W &= \int_{t=0}^{t=1} ((3t^4 - 2t)4t^3 + (t + 2t^2) - t^8 2t)dt \\ &= \int_0^1 (12t^7 - 8t^4 + t + 2t^2 - 2t^9)dt = \frac{13}{15}. \end{aligned}$$

Problemas Sección 3

1. Calcular las integrales de línea del campo vectorial dado sobre las curvas indicadas:

   a) $F(x,y) = (x^2 - 2xy, y^2 - 2xy)$ a lo largo de la parábola $y = x^2$ desde el punto $(-2,4)$ hasta el punto $(1,1)$.

   b) $F(x,y,z) = (x,y,xz-y)$ sobre el segmento de recta desde el punto $(0,0,0)$ hasta el punto $(1,2,4)$.

   Solución: (a) $-369/10$, (b) $23/6$.

2. Dado el campo vectorial:

$$F(x,y) = \left(\frac{x+y}{x^2+y^2}, \frac{x+y}{x^2+y^2}\right)$$

   calcular la integral de línea de F a lo largo de la circunferencia $x^2+y^2 = a^2$ recorrida en sentido positivo.

   Solución: 0.

3. Calcular la integral de línea del campo

$$F(x,y) = \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\right)$$

   sobre el cuarto de elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ situado en el primer cuadrante, desde el punto $(a,0)$ hasta el punto $(0,b)$.

   Solución: $\sqrt{1+b^2} - \sqrt{1+a^2}$.

4. Calcular el trabajo realizado por una fuerza proporcional al vector dirigido hacia el origen, sobre el recorrido del primer cuadrante de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, desde el punto $(a,0)$ hasta el $(0,b)$.

   Solución: $\frac{k}{2}(a^2 - b^2)$ con $k > 0$.

5. Calcular la integral

$$\int yzdx + xzdy + xydz$$

   a lo largo de la hélice

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \\ z = kt \end{cases},$$

   entre los puntos $(a,0,0)$ y $(a,0,2k\pi)$.

   Solución: 0.

6. Calcular la integral
$$\int xdy - ydx$$
a lo largo de la hipocicloide
$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}, \ t \in [0, 2\pi].$$
Solución: $\frac{3}{4}\pi a^2$ (es el doble del área de la hipocicloide).

7. Calcular
$$\int_{(1,1)}^{(4,2)} (x+y)dx + (y-x)dy$$
a lo largo de:

a) La parábola $y^2 = x$.

b) Una recta.

c) Los segmentos desde $(1,1)$ a $(1,2)$ y desde $(1,2)$ a $(4,2)$.

d) La curva
$$\begin{cases} x = 2t^2 + t + 1 \\ y = t^2 + 1 \end{cases}$$
Solución: (a) 34/3, (b) 11, (c) 14, (d) 32/3.

8. Calcular la integral $\int (2x - y + 4)dx + (5y + 3x - 6)dy$ sobre las aristas del triángulo en el plano XY de vértices $(0,0)$, $(3,0)$ y $(3,2)$.

Solución: 12.

9. Calcular la misma integral del ejercicio 8 pero sobre la circunferencia de radio 4 centrada en el origen.

Solución: 64π.

4. Teorema de Green

El resultado que estudiaremos en esta sección, el llamado Teorema de Green, relaciona un cierto tipo de integrales de línea (aquéllas en que la curva C es cerrada[1] y simple, o sea, no tiene "picos" ni autointersecciones) con integrales dobles (o integrales de área).

Notación 1 *Cuando escribamos una integral de línea a lo largo de una curva cerrada C, utilizaremos el símbolo $\oint_C$, como en $\oint_C F_1(x,y)dx + F_2(x,y)dy$.*

[1] Otra forma de decir que una curva es cerrada, es afirmando que su punto inicial y el final coinciden.

Definición 6 *Diremos que una curva parametrizada en el plano* $C \equiv (f(t), g(t))$ *es regular por secciones si para las funciones* f, g *existen las derivadas en todo punto* t *de su dominio exceptuando un número finito de valores* $t_0, t_1, ..., t_k$.

Así, por ejemplo, el contorno de un triángulo es una curva regular por secciones, ya que es diferenciable en todos los valores t corresponidientes a las aristas, excepto los vértices. El mismo comentario es válido para cualquier polígono regular y para circunferencias, elipses, etc.

Teorema 1 *[Green]Sea* C *una curva parametrizada en el plano, cerrada y regular por secciones. Sea* R *la región del plano determinada por* C *y su interior. Si* $M, N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *son funciones reales continuas y que tienen derivadas parciales continuas en toda la región* R*, entonces*

$$\boxed{\oint_C M(x,y)dx + N(x,y)dy = \int\int_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA.}$$

El Teorema de Green puede utilizarse tanto para calcular un integral de línea mediante una integral doble como para realizar el cálculo inverso. A continuación, veremos un ejemplo de cada caso.

Ejemplo 8 *Supongamos que queremos calcular la integral de línea*

$$I = \oint_C (2y + \sqrt{1+x^5})dx + (5x - e^{y^2})dy$$

a lo largo de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$. *Lo primero que hay que hacer es comprobar que se cumplen las hipótesis del teorema; pero claramente la circunferencia es una curva cerrada regular y, en este caso en que*

$$M(x,y) = 2y + \sqrt{1+x^5}, N(x,y) = 5x - e^{y^2},$$

tenemos:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2, \frac{\partial N}{\partial x} = 5,$$

que obviamente son funciones continuas. Aplicando el teorema, con R *el círculo de radio* 2*, resulta:*

$$I = \oint_C (2y + \sqrt{1+x^5})dx + (5x - e^{y^2})dy = \int\int_R (5-2)dA$$
$$= 3\int\int_R dA = 3 \cdot 4\pi = 12\pi.$$

Notemos que evaluar directamente I *como integral de línea hubiera sido mucho más difícil.*

Ejemplo 9 *Vamos a ver una fórmula para calcular áreas mediante integrales de línea.*

Si R es una región cualquiera a la que se le puede aplicar el Teorema de Green (es decir, está delimitada por una curva cerrada C simple y regular a trozos), el área A de R está dada por la expressión

$$A = \frac{1}{2}\oint_C xdy - ydx. \tag{9}$$

En efecto: tomando $M(x,y) = -y$ y $N(x,y) = x$ como las funciones del enunciado del Teorema de Green, resulta que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -1, \frac{\partial N}{\partial x} = 1,$$

de donde, aplicando Green,

$$\oint_C xdy - ydx = \int\int_R (1-(-1))dA = 2\int\int_R dA = 2A.$$

Podemos aplicar esta fórmula, por ejemplo, para encontrar el área encerrada por la elipse $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$. Una parametrización de la elipse (que, como ya hemos comentado, es cerrada, simple y regular) viene dada por

$$C \equiv \begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi].$$

Ahora, aplicando la fórmula (9) con $dx = -a\sin tdt$ i $dy = b\cos tdt$:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\oint_C xdy - ydx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a\cos t\cdot b\cos t\cdot dt - b\sin t\cdot(-a\sin t)\cdot dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(ab\cos^2 t + ab\sin^2 t)\cdot dt \\ &= \frac{1}{2}2ab\pi = \pi ab. \end{aligned}$$

Problemas Sección 4

1. Comprueba el Teorema de Green sobre el cuadrado de vértices $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,2)$ y $(0,2)$ con el campo vectorial $\mathbf{F}(x,y) = (x^2 - xy^3, y^2 - 2xy)$.

2. Comprueba el Teorema de Green en el caso del problema 8 de la Sección 3.

3. Comprueba el Teorema de Green en el caso del problema 9 de la Sección 3.

4. Enuncia el Teorema de Green. Utiliza este teorema para calcular el área del cuadrilátero determinado por los puntos $(0,0)$, $(5,1)$, $(4,5)$ y $(0,3)$.

   Solución: $33/2$.

5. Sea C la curva cerrada descrita por el par de gráficas

$$\left\{ \begin{array}{l} y = \sin x \\ y = 2\sin x \end{array} \right. , \quad x \in [0, 2\pi],$$

   orientada en sentido positivo. Calcula la integral siguiente directamente y utilizando el Teorema de Green:

$$\int_C (1+y^2)dx + ydy.$$

   Solución: $-3\pi/2$.

6. Sea C la curva cerrada y orientada positivamente descrita de la manera siguiente: el segmento $y=0$ entre $x=1$ y $x=2$, el arco $y=\sqrt{4-x^2}$ en el primer cuadrante, el segmento $x=0$ entre $y=2$ y $y=1$, el arco $y=\sqrt{1-x^2}$ en el primer cuadrante. Calcula la integral siguiente directamente y utilizando el Teorema de Green:

$$\int_C \frac{x}{x^2+y^2}dx - \frac{y}{x^2+y^2}dy.$$

   Solución: $2\log 2$.

7. Enuncia el Teorema de Green. Utiliza este resultado para calcular el área del cuadrilátero determinado por los puntos $(0,0)$, $(5,2)$, $(3,4)$ y $(0,3)$.

   Solución: $23/2$.

5. Interpretación física del Teorema de Green: campos conservativos

Recordemos de los cursos de Física que un campo de fuerzas se dice que es conservativo si el trabajo que efectúa sobre una partícula que se mueve de un punto $P = (x_P, y_P)$ a otro $Q = (x_Q, y_Q)$ no depende del camino seguido por la partícula. La cuestión que ahora nos planteamos es la de saber cuándo un campo $F(x,y) = (F_1(x,y), F_2(x,y))$ es conservativo, y la respuesta nos la da el Teorema de Green: si F es tal que $\frac{\partial F_1}{\partial y}$ y $\frac{\partial F_2}{\partial x}$ son continuas y además

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x},$$

entonces, $F(x,y)$ es conservativo.

En efecto, consideremos dos caminos regulares a trozos cualesquiera C_1, C_2 que van de P a Q sin cruzarse. En ese caso, el camino $C = C_1 \cup (-C_2)$ (es decir: vamos de P a Q siguiendo C_1 y regresamos de Q a P por C_2 recorrido en sentido inverso, como en la figura) es un camino simple cerrado, y suponiendo que las componentes $F_1(x, y)$ y $F_2(x, y)$ del campo $F(x, y)$ son continuas y con derivadas parciales continuas, podemos aplicar el teorema y hallar que el trabajo efectuado por F a lo largo de C es:

$$\begin{aligned} W &= \oint_C F_1(x,y)dx + F_2(x,y)dy \\ &= \int\int_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dA = 0. \end{aligned}$$

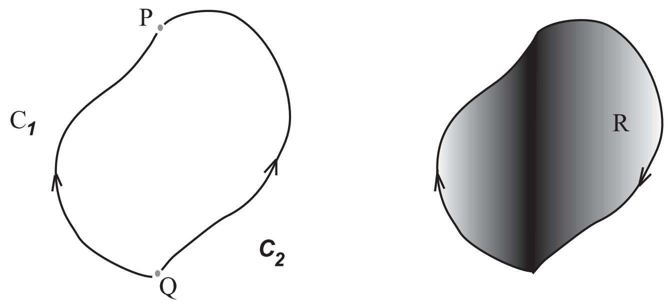

Figura 5: Caminos que encierran una región

Pero el trabajo a lo largo de C es igual al trabajo efectuado a lo largo de C_1 menos el trabajo a lo largo de C_2 (ya que C_2 está recorrida en sentido contrario, recordemos la nota 3), es decir:

$$\int_{C_1} F_1(x,y)dx + F_2(x,y)dy - \int_{C_2} F_1(x,y)dx + F_2(x,y)dy = 0,$$

o bien (observemos que ahora las integrales a lo largo de C_1 y C_2 no son cerradas):

$$\int_{C_1} F_1(x,y)dx + F_2(x,y)dy = \int_{C_2} F_1(x,y)dx + F_2(x,y)dy,$$

y por tanto el trabajo invertido en ir de P a Q no depende del camino seguido.

Ejemplo 10 *Comprobemos que el campo* $F(x, y) = (ye^{xy} - 2x, xe^{xy} + 2y)$ *es conservativo. Lo que hay que hacer es ver que la integral*

$$\int_P^Q (ye^{xy} - 2x)dx + (xe^{xy} + 2y)dy$$

no depende de qué curva C elijamos para ir de P a Q. Aquí,

$$F_1(x,y) = ye^{xy} - 2x, F_2(x,y) = xe^{xy} + 2y,$$

y claramente:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = e^{xy} + xye^{xy}$$
$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = e^{xy} + yxe^{xy}.$$

Como $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$, la integral del campo F no depende del camino, y es conservativo.

Problemas Sección 5

1. Demuestra que

$$\int_{(1,0)}^{(2,1)} (2xy - y^4 + 3)dx + (x^2 - 4xy^3)dy$$

es independiente del camino. Calcula su valor.

Solución: 60π.

2. Consideremos el campo $\mathbf{F}(x,y) = (10x^4 - 2xy^3, -3x^2y^2)$. ¿Es conservativo? Calcular la integral del campo $\mathbf{F}$ desde el punto $(0,0)$ al punto $(2,1)$ a lo largo de la curva $x^4 - 6xy^3 = 4y^2$.

Solución: Si. 60.

3. El campo $\mathbf{F}(x,y) = (3x^2y, x^3 + 1)$, ¿es conservativo?.

Solución: Si.

4. El campo $F(x,y) = (xy^2, x^3y)$, ¿es conservativo?.

Solución: No.

5. Calcular

$$\int_{(1,0)}^{(-1,0)} \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}$$

a lo largo de los caminos siguientes:

a) El segmento que une los puntos (en este orden) $(1,0)$, $(1,1)$, $(-1,1)$ y $(-1,0)$.

b) El segmento que une los puntos (en este orden) $(1,0)$, $(1,-1)$, $(-1,-1)$ y $(-1,0)$.

Demostrar que, aunque se verifica $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, la integral depende de la trayectoria que va de $(1,0)$ a $(-1,0)$. Razonar la respuesta.

Solución: (a) π, (b) $-\pi$.

6. Justificación de la definición de integral de línea

A continuación, presentamos una justificación de por qué la definición de integral de línea para campos escalares es la que se ha dado. Esto no constiyuye una demostración (las definiciones no se demuestran), sólo es una ayuda para entender una construcción aparentemente tan complicada.
Recordemos muy brevemente la interpretación geométrica de la integral definida, que da lugar a su definición. Si queremos integrar $y = F(x)$ cuando $x \in [a, b]$, dividimos el intervalo $[a, b]$ en subintervalos de la forma $[x_i, x_{i+1}]$ y sumamos las áreas rectangulares $F(x_i)(x_{i+1} - x_i)$. Después, se toma el límite cuando el tamaño de los subintervalos $[x_i, x_{i+1}]$ se hace tender a 0, es decir: si $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, se toma $\Delta x_i \to 0$.

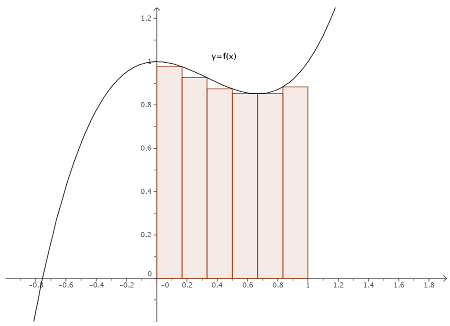

Figura 6: La integral de Riemann

Supongamos ahora que queremos integrar una función $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, que está definida sobre el plano, a lo largo de una cierta curva $y = y(x)$. Es decir, queremos calcular la “suma infinita de todos los valores $F(x, y)$ que toma la función F cuando los puntos (x, y) están sobre la curva $y = y(x)$”. Este número es lo que se conoce como integral de línea de F a lo largo de $y = y(x)$ y se representa por

$$\int_C F(s)ds,$$

donde C es una parametrización de la curva.

Imitando el proceso para funciones reales de variable real, dividiremos la curva en segmentos curvos $\widehat{P_i P_{i+1}}$, tomaremos el valor de la función en un punto extremo, $F(P_i)$, y formaremos los productos $F(P_i) \cdot \Delta s_i$, donde Δs_i es la longitud del segmento $\widehat{P_i P_{i+1}}$. Todo el problema se reduce ahora a encontrar la forma de tomar el límite cuando $\Delta s_i \to 0$.

Una forma de construir este límite es la siguiente. Consideremos el arco $P_i\widehat{P}_{i+1}$ y la aproximación a su longitud que nos da el teorema de Pitágoras:

$$\Delta s_i \simeq \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}.$$

Entonces, cuando tomemos el límite $\Delta x_i \to 0$, $\Delta y_i \to 0$, también será $\Delta s_i \to 0$. Con esto, el problema pasa de construir el límite cuando $\Delta s_i \to 0$ a hacerlo cuando $\Delta x_i \to 0$, $\Delta y_i \to 0$.

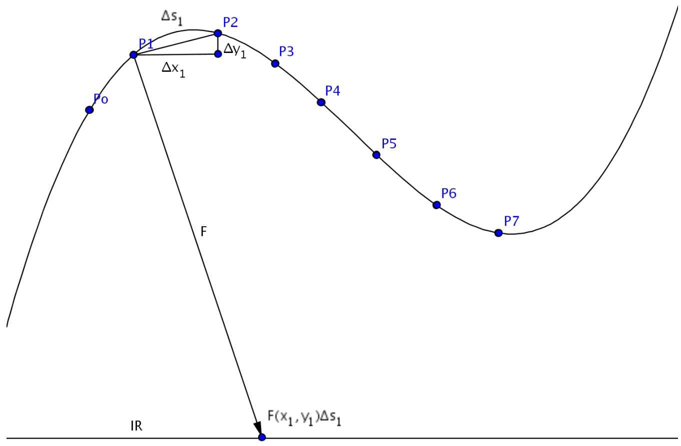

Figura 7: La integral de línea

Para ver cómo podemos definir este otro límite, supongamos que la curva $y = y(x)$ a lo alrgo de la cual integraremos F, viene dada en forma paramétrica como

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}.$$

En tal caso, por la definición de derivada como límite de cocientes incrementales (o, para aquellos que sepan de qué se trata, por el teorema del valor medio), en un punto (x_0, y_0) será:

$$\Delta x_0 = x - x_0 = f(t) - f(t_0) \simeq f'(t_0)(t - t_0) = f'(t_0)\Delta t_0,$$

y, análogamente,

$$\Delta y_0 \simeq g'(t_0)\Delta t_0.$$

Sustituyendo en la expresión aproximada de Δs_i:

$$\Delta s_i \simeq \sqrt{f'(t_i)^2 + g'(t_i)^2} \cdot \Delta t_i,$$

donde t_i es el instante para el cual la curva pasa por (x_i, y_i), es decir,

$$(x_i, y_i) = P_i = (f(t_i), g(t_i)).$$

Por tanto, tomar el límite cuando $\Delta s_i \to 0$ equivale a tomar el límite $\Delta t_i \to 0$. Cuando hacemos esto, en realidad estamos calculando

$$\int_C F(s)ds = \lim_{\Delta t_i \to 0} \sum_i F(x_i, y_i) \cdot \sqrt{f'(t_i)^2 + g'(t_i)^2} \cdot \Delta t_i,$$

o sea,

$$\int_C F(s)ds = \int_{t \in [a,b]} F(x(t), y(t)) \cdot \sqrt{f'(t_i)^2 + g'(t_i)^2} dt.$$

En definitiva: si queremos calcular la integral de línea del campo escalar $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a lo largo de la curva $C(t) : (x = f(t), y = g(t))$, entre los puntos $P = (x_0, y_0) = (f(t_0), g(t_0))$ y $Q = (x_1, y_1) = (f(t_1), g(t_1))$, hemos de calcular la integral de una variable

$$\int_C F(s)ds = \int_{t_0}^{t_1} F(x(t), y(t)) \cdot \sqrt{f'(t_i)^2 + g'(t_i)^2} dt.$$