

**Temas selectos de Matemáticas Aplicadas**  
**Introducción a las geometrías Riemanniana y simpléctica**  
ENERO 2008- MAYO 2009

**Profesor:** Dr. José Antonio Vallejo (Facultad de Ciencias). Email: [jvallejo@fciencias.uaslp.mx](mailto:jvallejo@fciencias.uaslp.mx).

**Horario y salón de la asignatura:** Diario 16:00 - 17:00, Salón 25.

	Martes	11:00 - 12:00
<b>Tutorías:</b>	Miércoles	11:00 - 12:00
	Viernes	9:00 - 10:00

**Bibliografía recomendada:**

- [1] R. Abraham: Foundations of Mechanics. Benjamin 1969.
- [2] A. Besse: Einstein manifolds. Springer Verlag 1987.
- [3] Yu. Manin: Gauge field theory and complex geometry. Springer-Verlag, Berlin 1988.
- [4] L. Nicolaescu: Lectures on the geometry of manifolds. World Scientific, 1996.
- [5] F. Warner: Foundations of differential manifolds and Lie groups. Scott, Foresman and Co., 1971.

Las referencias básicas son [1], [2], [4] y [5]. Específicamente, seguiremos [5] para estudiar las generalidades de variedades diferenciales, [2] en la parte de geometría Riemanniana, [1] en la de simpléctica y [4] para fibrados. El texto de Manin [3] será básico en el tratamiento de las supervariedades.

**Calificación:** A lo largo del curso se asignarán tareas individuales con las que se realizará principalmente la evaluación y un trabajo final que consistirá en el desarrollo y exposición de algún tema complementario a los vistos durante el curso. El porcentaje de cada una de estas evaluaciones en la nota final será el siguiente:

Tareas	75%
Trabajo Final	25%.

**Requisitos:** Es conveniente que el alumno conozca de antemano que el curso es de carácter avanzado y que será muy exigente en cuanto al trabajo a desarrollar. Se sugiere que el alumno tenga una buena capacidad de abstracción y una sólida formación en asignaturas como Análisis Matemático, Álgebra Lineal y Topología. Es recomendable que aquellos alumnos que quieran inscribirse en la asignatura mantengan primero una entrevista con el profesor responsable de la misma y con el tutor que tienen asignado.

**Exámenes:** Los alumnos que no obtengan una calificación de 6 mediante el sistema anterior, podrán optar por el examen final ordinario, cuya fecha se establecerá de acuerdo con lo que determine la Secretaría Escolar de la Facultad de Ciencias.

## Descripción del Curso

El curso tiene un carácter avanzado y en él estudiaremos los rudimentos de la geometría de Riemann así como de la geometría simpléctica, con vistas a sus aplicaciones en Física Teórica (fundamentalmente) y a otras ramas de las Matemáticas. La parte final del curso se centrará en el cálculo de variaciones como herramienta para estudiar dinámica en variedades y una introducción a la geometría de supervariedades, para lo cual veremos primero una introducción a la teoría general de fibrados vectoriales.

### Temario del curso

#### **TEMA I:** Variedades diferenciales

1.1 Introducción a las variedades diferenciales. 1.2 Atlas, topología de variedad. 1.3 Funciones  $C^\infty(M)$ . 1.4 Aplicaciones diferenciables entre variedades. 1.5 Vectores tangentes. El espacio tangente  $T_m M$ . 1.6 Campos vectoriales y 1-formas diferenciales. 1.7 Las variedades  $TM$  y  $T^*M$ . 1.8 Álgebra tensorial y exterior de una variedad. 1.9 Grupos de Lie. Campos invariantes y álgebra de Lie.

#### **TEMA II:** Variedades riemannianas

2.1 Definición y existencia de estructuras riemannianas. 2.2 Isomorfismo entre  $TM$  y  $T^*M$ . 2.3 El operador  $*$  de Hodge. 2.4 La codiferencial  $\delta_g$ . 2.5 Longitud de curvas. Las variedades riemannianas como espacios métricos. 2.6 Algunos cálculos en variedades riemannianas.

#### **TEMA III:** Conexiones lineales

3.1 Definición de Koszul. Existencia. 3.2 Transporte paralelo. 3.3 Conexiones lineales y leyes de derivación. 3.4 Torsión de una conexión lineal. 3.5 Curvatura de una conexión lineal. 3.6 Identidades de Bianchi. 3.7 Conexión de Levi-Civita. 3.8 Campo de Riemann-Christoffel. 3.9 Curvatura seccional. Teorema de Schur.

#### **TEMA IV:** Integración en variedades

4.1 Orientación. 4.2 Dominios regulares. Variedades con frontera. 4.3 Integración de formas con grado máximo. 4.4 Teorema de Stokes. 4.5 Integración en una variedad pseudo-riemanniana. 4.6 Introducción a la cohomología de DeRham.

#### **TEMA V:** Mecánica simpléctica

5.1 Introducción. Mecánica Newtoniana. 5.2 Las ecuaciones de Hamilton. Espacio de fases. 5.3 Variedades simplécticas. Teorema de Darboux. 5.4 Estructura simpléctica canónica en  $T^*M$ . 5.5 Campos hamiltonianos. Conservación de la energía. 5.6 Álgebras de Poisson. Ideas básicas sobre cuantización.

#### **TEMA VI:** Cálculo de variaciones

6.1 Problemas variacionales de primer orden. Variedad de 1-jets asociada a una submersión  $J^1(p)$ . 6.2 Ecuaciones de Euler-Lagrange. 6.3 Ecuaciones en dimensión 1. Geodésicas. 6.4 Teorema de Noether.

#### **TEMA VII:** Teoría de fibrados

7.1 Fibrados vectoriales. 7.2 Fibrados principales. Conexiones en fibrados principales. Fibrados vectoriales asociados. 7.3 Fibrados vectoriales y  $C^\infty(M)$ -módulos: La correspondencia de Serré-Swan.

#### **TEMA VIII:** Introducción a las supervariedades

8.1 El álgebra local  $\mathcal{O}_p$ . 8.2 Prehaces y haces. Tallos. 8.3 Espacios anillados reducidos. Prevariedades diferenciales. 8.4 Pegado de prevariedades. Variedades diferenciales. Ejemplos. 8.5 Haces de superálgebras. 8.6 Supervariedades. 8.7 El teorema de Batchelor.