Capítulo 1

Números reales

1.1. Sistemas numéricos

1.1.1. Números naturales: principio de inducción

Los números 1, 2, 3, ..., reciben el nombre de ***números naturales***. Con ellos se realizan dos operaciones, la ***suma*** de números naturales y el ***producto*** de números naturales, que dan como resultado otro número natural perfectamente definido. Para dos números naturales cualesquiera m y n, su suma suele representarse por $m+n$ y su producto por $m \cdot n$ o mn (si no hay lugar a confusión). Si denotamos con $\mathbb{N}$ el conjunto de todos los números naturales, podemos pensar en la suma y el producto como aplicaciones del producto cartesiano $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$:

$$\begin{array}{rcl} + : \mathbb{N}\times\mathbb{N} & \to & \mathbb{N}, \\ (m,n) & \to & m+n \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \cdot : \mathbb{N}\times\mathbb{N} & \to & \mathbb{N}. \\ (m,n) & \to & m\cdot n \end{array}$$

A continuación describimos las propiedades fundamentales de estas operaciones (m, n, p representan números naturales cualesquiera):

- *Propiedad asociativa de la suma:* $(m+n)+p = m+(n+p)$.
- *Propiedad conmutativa de la suma:* $m+n = n+m$.
- *Propiedad asociativa del producto:* $(mn)p = m(np)$.
- *Propiedad conmutativa del producto:* $mn = nm$.
- *Elemento neutro (identidad) para el producto: hay un número natural, que denotamos por* 1, *tal que* $1 \cdot n = n \cdot 1 = n$.
- *Propiedad distributiva del producto respecto de la suma:* $m(n+p) = mn+mp$.

Se puede asimismo comparar el tamaño de dos números naturales cualesquiera y establecer así una relación de orden en $\mathbb{N}$. Suele escribirse $m \leq n$ para indicar que m es ***menor o igual*** que n (o lo que es lo mismo, que n es ***mayor o igual*** que m, lo que también se escribe $n \geq m$); y se escribe $m < n$ (o $n > m$) para expresar que m es ***estrictamente menor*** que n, es decir, que m es menor (y distinto) que n. Esta relación cumple las siguientes propiedades (m, n, p representan números naturales cualesquiera):

- *Propiedad reflexiva:* $m \leq m$.

- *Propiedad antisimétrica: si $m \leq n$ y $n \leq m$, entonces $m = n$.*
- *Propiedad transitiva: si $m \leq n$ y $n \leq p$, entonces $m \leq p$.*
- *Propiedad de orden total: siempre es $m \leq n$ o $n \leq m$.*

La ordenación de $\mathbb{N}$ no es independiente de la suma y el producto: para dos números naturales m, n se tiene $m > n$ si y solo si $m = n + p$ para algún número natural p.

Principio de buena ordenación. Todo conjunto no vacío de números naturales posee un elemento mínimo, es decir, dado $S \subseteq \mathbb{N}$ no vacío, existe un elemento m en S tal que $m \leq n$ para todo $n \in S$.

El principio de inducción. Esta es una de las propiedades de $\mathbb{N}$ que más vamos a usar durante el curso. Se puede enunciar así:

- *si un conjunto de números naturales contiene a 1 y por cada elemento n del conjunto también $n+1$ pertenece a él, entonces el conjunto es $\mathbb{N}$. Es decir, dado $S \subseteq \mathbb{N}$ tal que $1 \in S$ y $n+1 \in S$ siempre que $n \in S$, es $S = \mathbb{N}$.*

En la práctica, el principio de inducción suele aplicarse en términos de propiedades más que en términos de conjuntos:

- *supongamos que para cada número natural n se tiene una propiedad P_n que puede ser cierta o falsa. Supongamos además que:*

  a) P_1 es cierta;

  b) si para algún $n \in \mathbb{N}$ la propiedad P_n es cierta, entonces la propiedad P_{n+1} también es cierta.

  Entonces, P_n es cierta para todo $n \in \mathbb{N}$.

La siguiente variante se llama ***principio de inducción completa***:

- *supongamos que para cada número natural n se tiene una propiedad P_n que puede ser cierta o falsa. Supongamos además que:*

  a) P_1 es cierta;

  b) si para algún $n \in \mathbb{N}$ todas las propiedades $P_1, P_2, \dots, P_n$ son ciertas, entonces P_{n+1} también es cierta.

  Entonces, P_n es cierta para todo $n \in \mathbb{N}$.

Es un hecho notable, señalado por el matemático italiano Peano en su obra *Arithmetices principia nova methodo exposita* (Bocca, 1889) que todas las propiedades de los números naturales pueden deducirse de las siguientes, llamadas en su honor ***axiomas de Peano*** para los números naturales:

- *Para todo número natural n existe otro número natural, n_s, que se llama* **siguiente** *o* **sucesor** *de n.*
- *Existe un número natural, que denotamos por 1, tal que $n_s \neq 1$ cualquiera que sea el número natural n.*

- *Para números naturales cualesquiera m y n, es $m_s = n_s$ si y solo si $m = n$.*
- *Principio de inducción: si un conjunto S de números naturales contiene a* 1 *y por cada elemento $n \in S$ también $n_s \in S$, entonces $S = \mathbb{N}$.*

Las operaciones de suma y producto y la relación de orden se definen entonces en términos de siguientes, véase por ejemplo [BIRKHOFF-MACLANE].

1.1.2. Números enteros y racionales

El conjunto de los ***números enteros*** $\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$, que amplía el de los naturales, se denota por $\mathbb{Z}$. En él hay definidas dos operaciones, suma y producto, y una relación de orden. Las propiedades de la suma, el producto y el orden para los números naturales también las cumplen los números enteros. Y además:

- *Elemento neutro (cero) para la suma: hay un número entero, que denotamos por* 0*, tal que $0 + n = n + 0 = n$ para cualquier entero n.*
- *Elemento opuesto para la suma: para cada entero n hay otro número entero (y solo uno), que denotamos por $-n$, tal que $(-n) + n = n + (-n) = 0$.*

Estas propiedades y las anteriores de la suma y el producto se resumen diciendo que $\mathbb{Z}$, con estas dos operaciones, es un anillo conmutativo. Para la relación de orden podemos añadir:

- *Relación del orden con la suma: si $a \leq b$, entonces $a + c \leq b + c$.*
- *Relación del orden con el producto por números no negativos: si $a \leq b$ y $c \geq 0$, entonces $ac \leq bc$.*

Principio de buena ordenación de los conjuntos acotados inferiormente. El principio de buena ordenación de los números naturales no es válido para los números enteros: por ejemplo, el propio conjunto $\mathbb{Z}$ no tiene elemento mínimo, pues para cada $n \in \mathbb{Z}$ es $n - 1 < n$. Sin embargo, hay una propiedad análoga para cierta clase de subconjuntos: los acotados inferiormente.

Un subconjunto $S \subseteq \mathbb{Z}$ no vacío se dice que está acotado inferiormente si existe algún número entero $k \in \mathbb{Z}$ tal que para todo $n \in \mathbb{Z}$, $k \ \leq n$. Todo conjunto no vacío $S \subseteq \mathbb{Z}$ acotado inferiormente posee un elemento mínimo, es decir, existe un elemento m en S tal que para todo $n \in S$, $m \leq n$.

Un principio de inducción. En $\mathbb{Z}$ puede hablarse del siguiente a un número entero, en el sentido de que entre n y $n + 1$ no hay ningún otro número entero. No se cumple, sin embargo, el principio de inducción, sino una propiedad similar aunque más débil:

- *si un conjunto de números enteros contiene un número k y que por cada elemento n del conjunto también $n + 1$ pertenece a él, entonces el conjunto contiene a todos los números enteros mayores o iguales que k. Es decir, si $k \in S \subseteq \mathbb{Z}$ y $n + 1 \in S$ siempre que $n \in S$, entonces $S \supseteq \{n \in \mathbb{Z} : n \geq k\}$.*

Los números racionales. En $\mathbb{Z}$ es posible la resta, pero no la división. Esta operación es posible (dividiendo por elementos distintos de 0) en el conjunto $\mathbb{Q}$ de los ***números racionales***, que son cocientes de números enteros (con denominador no nulo). En este conjunto están definidas la suma y el producto, y una relación de orden. Las propiedades de la suma, el producto y el orden para los números enteros también las cumplen los números racionales. Y además:

- *Elemento inverso para el producto: si $a \neq 0$, hay un número racional (y solo uno) que denotamos por a^{-1} o $\frac{1}{a}$, tal que $a^{-1}a = aa^{-1} = 1$.*

Esta y las anteriores propiedades de la suma, el producto y el orden se resumen diciendo que $\mathbb{Q}$ es un cuerpo conmutativo totalmente ordenado.

Señalemos que en $\mathbb{Q}$ no hay ninguna propiedad similar al principio de inducción. Ni siquiera puede hablarse del siguiente a un número dado: concretamente, entre dos números racionales distintos siempre hay otro número racional. En efecto: si $a < b$, es fácil comprobar que $a < \frac{a+b}{2} < b$.

Es fácil descubrir *huecos* en $\mathbb{Q}$: por ejemplo, ningún número racional puede representar la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado 1. Dicho de otra forma, no existe ningún número racional a tal que $a^2 = 2$. En efecto: sea $a \in \mathbb{Q}$; podemos escribirlo como $a = \frac{m}{n}$, con m y n enteros sin factores primos comunes y $n \neq 0$. Si fuera $a^2 = 2$ se seguiría que $m^2 = 2n^2$, luego m^2 es par, y también debe serlo m; pero entonces $m = 2p$ para algún entero p, y sustituyendo en $m^2 = 2n^2$ queda $4p^2 = 2n^2$. Es decir, $2p^2 = n^2$; luego n^2 es par, y también deber serlo n. En resumen, m y n son pares; pero habíamos supuesto que m y n no tenían factores comunes. La contradicción viene de suponer que $a^2 = 2$.

Para poder hablar de números que representen estas cantidades se necesita una nueva ampliación de los sistemas numéricos. Así pasamos a considerar el conjunto $\mathbb{R}$ de los ***números reales*** o, más exactamente, las propiedades de $\mathbb{R}$ (sin entrar en su naturaleza: no decimos qué es un número real, sino cómo se manejan los números reales).

1.1.3. Números reales: operaciones algebraicas

En $\mathbb{R}$ hay dos operaciones, suma y producto, respecto de las cuales es un cuerpo conmutativo. Esto significa que si a, b, c son números reales cualesquiera, se cumple:

a) *Propiedad asociativa de la suma: $(a+b)+c = a+(b+c)$.*

b) *Propiedad conmutativa de la suma: $a+b = b+a$.*

c) *Elemento neutro (cero) para la suma: hay un número real, que denotamos por 0, tal que $0+a = a+0 = a$.*

d) *Elemento opuesto para la suma: hay un número real (y solo uno), que denotamos por $-a$, tal que $(-a)+a = a+(-a) = 0$.*

e) *Propiedad asociativa del producto: $(ab)c = a(bc)$.*

f) *Propiedad conmutativa del producto: $ab = ba$.*

g) *Elemento neutro (identidad) para el producto: hay un número real distinto de 0, que denotamos por 1, tal que $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$.*

h) *Elemento inverso para el producto: si $a \neq 0$, hay un número real (y solo uno) que denotamos por a^{-1} o $1/a$, tal que $a^{-1}a = aa^{-1} = 1$.*

i) *Propiedad distributiva del producto respecto de la suma: $a(b+c) = ab+ac$.*

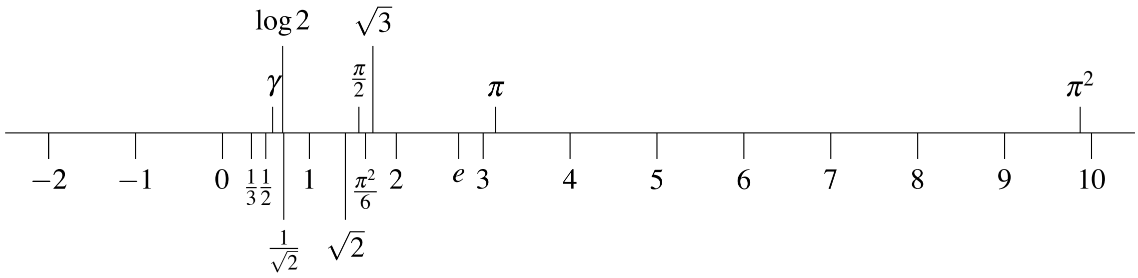
Todas las propiedades que usamos habitualmente se deducen de estas. Por ejemplo, veamos en detalle cómo se prueba que para todo número real x es $x \cdot 0 = 0$:

$$x \cdot 0 \overset{c)}{=} x(0+0) \overset{i)}{=} x \cdot 0 + x \cdot 0$$

y de *d)* se sigue

$$0 = -(x\cdot 0)+x\cdot 0 = -(x\cdot 0)+[(x\cdot 0+x\cdot 0)] \overset{a)}{=} [-(x\cdot 0)+x\cdot 0]+x\cdot 0 \overset{d)}{=} 0+x\cdot 0 \overset{c)}{=} x\cdot 0.$$

Los números reales se pueden representar gráficamente como puntos de una recta. Esto permite ver, sobre todo, las relaciones de orden.



La recta real, con algunos números señalados

1.2. Ordenación de los números reales

1.2.1. Desigualdades fundamentales en $\mathbb{R}$

En $\mathbb{R}$ hay una relación de orden que extiende la de los números racionales. Las propiedades básicas son las siguientes (a, b, c representan números reales cualesquiera):

- *Propiedad reflexiva:* $a \le a$.
- *Propiedad antisimétrica:* $a \le b$ *y* $b \le a \Longrightarrow a = b$.
- *Propiedad transitiva:* $a \le b$ *y* $b \le c \Longrightarrow a \le c$.
- *Propiedad de orden total:* $a \le b$ *ó* $b \le a$.
- *Relación con la suma:* $a \le b \Longrightarrow a+c \le b+c$.
- *Relación con el producto:* $c \ge 0$, $a \le b \Longrightarrow ac \le bc$*; en particular,* $c \ge 0$, $b \ge 0 \Longrightarrow bc \ge 0$.

Dados $a, b \in \mathbb{R}$, se escribe $a < b$ si $a \le b$ y $a \ne b$.

De estas propiedades pueden deducirse sucesivamente (es un ejercicio recomendable) las siguientes desigualdades, que utilizaremos de aquí en adelante sin más comentario según las necesitemos. En lo que sigue, a, b, c, d, $a_1, \dots, a_n$ representan números reales cualesquiera.

- $a \le b$, $b < c \Longrightarrow a < c$.
- $a < b$, $b \le c \Longrightarrow a < c$.
- $a < b \Longrightarrow a+c < b+c$.
- *Suma de desigualdades*: $a \le b$, $c \le d \Longrightarrow a+c \le b+d$, siendo entonces $a+c = b+d$ si y solo si $a = b$ y $c = d$.

- $a_1, \ldots, a_n \geq 0 \Longrightarrow a_1 + \cdots + a_n \geq 0$; además, $a_1 + \cdots + a_n > 0$ excepto si $a_1 = \cdots = a_n = 0$.
- $a > 0, b > 0 \Longrightarrow ab > 0$.
- $a > 0, b < 0 \Longrightarrow ab < 0$.
- $a < 0, b < 0 \Longrightarrow ab > 0$.
- $a^2 \geq 0$.
- $a \neq 0 \Longrightarrow a^2 > 0$.
- $2ab \leq a^2 + b^2$.
- $1 > 0, -1 < 0$.
- $a < b, c > 0 \Longrightarrow ac < bc$.
- $a < b, c < 0 \Longrightarrow ac > bc$.
- $a \leq b, c \leq 0 \Longrightarrow ac \geq bc$.
- $0 \leq a \leq b \Longrightarrow a^2 \leq b^2$.
- $0 \leq a < b \Longrightarrow a^2 < b^2$.
- $a > 0 \iff \dfrac{1}{a} > 0$.
- $0 < a \leq b \Longrightarrow \dfrac{1}{b} \leq \dfrac{1}{a}$.
- $a \leq b < 0 \Longrightarrow \dfrac{1}{b} \leq \dfrac{1}{a}$.

1.2.2. Valor absoluto de un número real. Desigualdades básicas

El ***valor absoluto*** de un número real a es el número real no negativo

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{si } a \geq 0; \\ -a, & \text{si } a \leq 0. \end{cases}$$

Gráficamente corresponde a la distancia de a al origen.

Definición 1.2.1 (distancia entre números reales). *Dados a, $b \in \mathbb{R}$, se llama* **distancia** *entre a y b al número real no negativo $|a-b|$.*

Gráficamente, $|a-b|$ mide la distancia geométrica entre los puntos a y b.

Recogemos las propiedades del valor absoluto que son de mayor interés para el resto del curso. Si a, b, c, d denotan números reales cualesquiera, se verifica:

- $|1| = 1$; $|-1| = 1$.
- $|-a| = |a|$.

- $-|a| \leq a \leq |a|$.
- $|a| \leq b \iff -b \leq a \leq b$.
- $|a| < b \iff -b < a < b$.
- $|a| > b \iff a > b$ ó $a < -b$.
- $|a| \geq 0$.
- $|a| = 0 \iff a = 0$.
- $|ab| = |a| \cdot |b|$.
- $|a^{-1}| = |a|^{-1}$ siempre que $a \neq 0$.
- $a^2 \leq b^2 \iff |a| \leq |b|$.
- $a^2 = b^2 \iff |a| = |b|$.

Desigualdad triangular. Si a y b son números reales cualesquiera,

$$|a+b| \leq |a| + |b|.$$

Esta desigualdad es muy útil, como iremos viendo. La demostración es sencilla: según las propiedades anteriores,

$$-|a| \leq a \leq |a|, \qquad -|b| \leq b \leq |b|.$$

Sumamos las desigualdades y resulta $-|a| - |b| \leq a+b \leq |a| + |b|$, es decir,

$$-(|a| + |b|) \leq a+b \leq (|a| + |b|).$$

Usamos otra de las propiedades anteriores ($|c| \leq d \iff -d \leq c \leq d$, cambiando la notación) y deducimos que $|a+b| \leq |a| + |b|$.

Desigualdad triangular inversa. Si a y b son números reales cualesquiera,

$$\Big| |a| - |b| \Big| \leq |a-b|.$$

Esta desigualdad es consecuencia de la desigualdad triangular. En efecto: aplicando la desigualdad triangular a los números b y $a-b$, resulta

$$|a| = |(a-b)+b| \leq |a-b| + |b|,$$

es decir,

$$|a| - |b| \leq |a-b|.$$

Cambiando el papel de a y b, tenemos $|b| - |a| \leq |b-a| = |a-b|$, es decir,

$$-(|a| - |b|) \leq |a-b|.$$

De aquí se deduce que $\Big| |a| - |b| \Big| \leq |a-b|$.

1.2.3. Conjuntos acotados en $\mathbb{R}$. El axioma del supremo

Dado un subconjunto S de $\mathbb{R}$ y un número real a, si $a \leq s$ para todo $s \in S$ se dice que a es una ***cota inferior*** de S y que S está ***acotado inferiormente*** (por a). Si b es otro número real y $b \geq s$ para todo $s \in S$, se dice que b es una ***cota superior*** de S y que S está ***acotado superiormente*** (por b). Si un conjunto S está acotado superior e inferiormente, se dice que está ***acotado***.

Un número real m se dice que es el ***mínimo*** de un conjunto S si pertenece al conjunto y es una cota inferior. Es decir, si $m \in S$ y $m \leq s$ para todo $s \in S$. Se escribe entonces $m = \min S$.

Un número real M se dice que es el ***máximo*** de un conjunto S si pertenece al conjunto y es una cota superior. Es decir, si $M \in S$ y $M \geq s$ para todo $s \in S$. En ese caso, se escribe $M = \max S$.

Un número real a se dice que es el ***ínfimo*** de un conjunto S si es la mayor cota inferior del S. Es decir, si $a \leq s$ para todo $s \in S$ y cada $a' > a$ no es cota inferior de S; de modo que se tendrá $a' > s'$ para algún $s' \in S$. En ese caso, se escribe $a = \inf S$.

Dicho de otra forma, el ínfimo de un conjunto es el máximo del conjunto de cotas inferiores del primero. Nótese que si $a = \inf S$, será $a = \min S$ si y solo si $a \in S$.

Un número real b se dice que es el ***supremo*** de un conjunto S si es la menor cota superior del S. Es decir, si $b \geq s$ para todo $s \in S$ y cada $b' < b$ no es cota superior de S; de modo que se tendrá $b' < s'$ para algún $s' \in S$. Se escribe $b = \sup S$.

Dicho de otra forma, el supremo de un conjunto es el mínimo del conjunto de cotas superiores del primero. Nótese que si $b = \sup S$, será $b = \max S$ si y solo si $a \in S$.

El ***axioma del supremo***, o ***axioma de completitud*** de $\mathbb{R}$, es la siguiente propiedad que caracteriza la diferencia entre $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$:

- *Todo subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ acotado superiormente tiene supremo.*

La propiedad simétrica (todo subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ acotado inferiormente tiene ínfimo) es consecuencia de lo anterior.

1.2.4. Propiedad arquimediana de $\mathbb{R}$: consecuencias

Teorema 1.2.2 (propiedad arquimediana de $\mathbb{R}$). *Dados dos números reales a, b, con $a > 0$, existe algún número natural n tal que $na > b$.*

Demostración. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, con $a > 0$. Razonemos por reducción al absurdo: supongamos que la tesis no es cierta, es decir, $na \leq b$ para todo número natural n, y veamos que se llega a una contradicción. En tal caso, el conjunto $S = \{na : n \in \mathbb{N}\}$, que no es vacío, estaría acotado superiormente (por b), luego por el axioma del supremo tendría supremo. Sea s este supremo, es decir, $s = \sup S = \sup\{na : n \in \mathbb{N}\}$. Puesto que $a > 0$, $s - a < s$; según la definición de supremo, $s - a$ ya no puede ser cota superior del conjunto S, de modo que existirá algún elemento en S estrictamente mayor que $s - a$. Dicho elemento será de la forma ma con $m \in \mathbb{N}$, y así $s - a < ma$. Pero esto implica que $s < ma + a = (m+1)a$ y obviamente $(m+1)a \in S$, con lo cual s no es una cota superior de S. Hemos llegado a una contradicción. $\square$

Aplicada al caso particular $a = 1$, la propiedad arquimediana muestra que el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales no está acotado superiormente por ningún número real.

Como consecuencia de la propiedad arquimediana se puede probar que todo número real está comprendido entre dos enteros consecutivos.

Teorema 1.2.3 (parte entera de un número real). *Dado $x \in \mathbb{R}$, existe un número entero (y uno solo), que suele denotarse con $[x]$, tal que*

$$[x] \leq x < [x] + 1.$$

El número $[x]$ se llama la **parte entera** *de x.*

Demostración. La desigualdad del enunciado equivale a decir que $[x]$ es el mayor número entero que es menor o igual que x. Para probar que existe, podemos utilizar uno cualquiera de los siguientes caminos:

Primer camino. Comenzamos por observar que todo conjunto no vacío de números enteros acotado superiormente tiene un elemento máximo, como se deduce del principio de buena ordenación de los conjuntos minorados sin más que tomar opuestos. Pero el conjunto

$$S = \{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$$

es no vacío, pues por la propiedad arquimediana existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > -x$ y así $-n < x$, luego $-n \in S$; además, S está acotado superiormente (por x o por cualquier número natural superior a x, si no queremos salirnos de $\mathbb{Z}$). Por lo tanto, S tiene un elemento máximo, llamémosle m. Como $m \in S$, se tendrá $m \leq x$. Y como m es el máximo de S y $m < m+1$, se deduce que $m+1 \notin S$, es decir, $x < m+1$.

Segundo camino. Utilizamos que todos los números naturales son mayores o iguales que 1 (demostrarlo por inducción) y que los números naturales son justamente los enteros positivos. Llamando nuevamente S al conjunto de enteros menores o iguales que x, S es no vacío por el argumento anterior y está acotado superiormente por x; aplicando el axioma del supremo, S tiene un supremo, al que vamos a llamar s. Como $s-1$ ya no es cota superior de S, por ser estrictamente menor que s, existirá $m \in S$ tal que $s - 1 < m \leq s$. Pero m también es cota superior de S, dado que si algún $n \in S$ verificase $n > m$ obtendríamos $m < n \leq s < m+1$, de donde $0 < n - m < 1$, y $n - m$ sería un entero positivo menor que 1, imposible. Por tanto vemos que hay un elemento de S que es cota superior de S, es decir, que es el máximo de S, y como antes deberá cumplir $m \leq x < m+1$. □

La propiedad arquimediana permite también deducir cómo están distribuidos en $\mathbb{R}$ los números racionales.

Teorema 1.2.4 (densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$). *Dados dos números reales a, b, con $a < b$, existe algún número racional r tal que $a < r < b$.*

Observación. Si existe tal r, podrá escribirse en la forma $r = m/n$ con $m \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}$, de modo que tenemos que encontrar $m \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que $a < m/n < b$ o, lo que es lo mismo, $na < m < nb$. Es intuitivamente claro, pensando en la representación gráfica de $\mathbb{R}$, que entre dos números a distancia mayor que 1 siempre se puede incluir un número entero (suponiendo los dos números positivos, por ejemplo, superponiendo el segmento unidad consigo mismo hacia la derecha, la primera vez que sobrepasemos el número más cercano al origen, no habremos sobrepasado el otro número). Esta es la idea que vamos a tratar de utilizar.

Demostración. La propiedad arquimediana aplicada a $b - a > 0$ y a 1 nos asegura la existencia de un $n \in \mathbb{N}$ tal que $n(b-a) > 1$, con lo cual $nb > na + 1$.

Sea ahora $S = \{p \in \mathbb{Z} : p > na\}$. Este es un conjunto no vacío (¿por qué?) de números enteros acotado inferiormente en $\mathbb{Z}$ (¿por qué?); por lo tanto, posee un elemento mínimo. Llamando $m = \min S$, puesto que $m \in S$ es $m > na$; y como es el mínimo de S, $m-1$ no puede estar en S, lo que significa que $m - 1 \leq na$. Pero entonces $m \leq na + 1 < nb$; así pues, $na < m < nb$ y finalmente $a < m/n < b$. □

1.2.5. Números irracionales

Los números reales que no son racionales se llaman ***números irracionales***. Veamos que existen números irracionales. Ya sabemos que no hay ningún número racional cuyo cuadrado es 2, así que vamos a probar que sí hay un número real positivo cuyo cuadrado es 2. Este número tendrá que ser irracional.

Consideremos el conjunto $S = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0,\ x^2 \leq 2\}$. Este es un conjunto no vacío de números reales (por ejemplo, $1 \in S$). Y está acotado superiormente, ya que si $x \in S$,

$$x^2 \leq 2 < 4 = 2^2,$$

de donde se deduce que $x \leq 2$. Es decir, 2 es una cota superior de S. Luego el conjunto S tiene supremo.

Sea $v = \sup S$; como $1 \in S$, $v \geq 1 > 0$. Comprobemos que no puede ser $v^2 > 2$ ni $v^2 < 2$.

Si $v^2 > 2$, entonces tomando $h = \min\{v, (v^2-2)/2v\}$ se tendría $h > 0$, $v - h \geq 0$ y

$$(v-h)^2 = v^2 - 2vh + h^2 > v^2 - 2vh \geq v^2 - (v^2-2) = 2 \geq x^2,$$

para todo $x \in S$, de donde $v - h \geq x$. Pero $v - h$ no puede ser cota superior del conjunto S porque es menor que su supremo.

Si $v^2 < 2$, entonces tomando $h = \min\{v, (2-v^2)/3v\}$ se tendría $h > 0$, $v + h > 0$ y

$$(v+h)^2 = v^2 + 2vh + h^2 \leq v^2 + 2vh + vh = v^2 + 3vh \leq v^2 + (2-v^2) = 2,$$

o sea, $v + h \in S$. Pero esto no puede ser, porque $v + h > v$ y en cambio para todo $x \in S$ se tiene $x \leq v$.

Queda así como única posibilidad $v^2 = 2$. Este número positivo cuyo cuadrado es 2 se representa por $\sqrt{2}$.

Teorema 1.2.5 (densidad de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$). *Dados dos números reales a, b, con $a < b$, existe algún número irracional x tal que $a < x < b$.*

Demostración. Sea $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ cualquiera (ya hemos visto que existe alguno). Puesto que $a - y < b - y$, según el teorema 1.2.4 existe algún $r \in \mathbb{Q}$ tal que $a - y < r < b - y$, de donde $a < r + y < b$. Por último, $r + y$ es un número irracional, ya que si fuera racional se tendría $y = (r + y) + (-r) \in \mathbb{Q}$. □

1.2.6. Intervalos en $\mathbb{R}$

Reciben el nombre de ***intervalos*** los subconjuntos de $\mathbb{R}$ definidos del siguiente modo (a, b son números reales cualesquiera):

- intervalo acotado y abierto: $(a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$;
- intervalo acotado, cerrado por la izquierda y abierto por la derecha: $[a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$;
- intervalo acotado, abierto por la izquierda y cerrado por la derecha: $(a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$;
- intervalo acotado y cerrado: $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$;
- intervalo abierto, acotado inferiormente pero no superiormente: $(a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$;
- intervalo cerrado, acotado inferiormente pero no superiormente: $[a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$;
- intervalo abierto, acotado superiormente pero no inferiormente: $(-\infty,b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$;

- intervalo cerrado, acotado superiormente pero no inferiormente: $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$;
- intervalo no acotado inferior ni superiormente: $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.

Nótese que si $a > b$, $(a,b) = \emptyset$, de modo que el conjunto vacío es un intervalo.

Los intervalos de $\mathbb{R}$ se caracterizan por la ***propiedad de los valores intermedios***:

Proposición 1.2.6 (caracterización de los intervalos reales). *Un subconjunto I de $\mathbb{R}$ es un intervalo si y solo si dados $x, y \in I$, cada $z \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq z \leq y$ también pertenece a I (dicho de otro modo: con cada dos valores están también todos los intermedios).*

Demostración. Para probar la implicación directa basta un examen de todos los casos. Por ejemplo, si $I = (a,b)$, x, $y \in I$, y $z \in \mathbb{R}$ es tal que $x \leq z \leq y$, se tiene $a < x \leq z \leq y < b$, luego $a < z < b$ y por definición $z \in I$.

La implicación inversa es trivial en el caso de que $I = \emptyset$. Suponemos, pues, $I \neq \emptyset$. Pueden presentarse las siguientes situaciones: *a)* I es acotado; *b)* I es acotado superiormente pero no inferiormente; *c)* I es acotado inferiormente pero no superiormente; *d)* I no es acotado superior ni inferiormente. Veamos cada una de ellas.

a) I es acotado. Sea $a = \inf I$, $b = \sup I$. Obviamente entonces $(a,b) \subseteq I \subseteq [a,b]$, pues $c \in (a,b) \iff a < c < b$, y por definición de supremo e ínfimo existirán un $x \in I$ con $x < c$ y un $y \in I$ con $c < y$, luego $c \in I$; por otra parte, también por definición de supremo e ínfimo, de $x \in I$ se sigue $a \leq x \leq b$, o sea, $x \in [a,b]$. Ahora,

- si $a, b \in I$, $[a,b] = (a,b) \cup \{a,b\} \subseteq I \subseteq [a,b]$, luego $I = [a,b]$;
- si $a \in I$, $b \notin I$, $[a,b) = (a,b) \cup \{a\} \subseteq I \subseteq [a,b] \setminus \{b\} = [a,b)$, luego $I = [a,b)$;
- si $a \notin I$, $b \in I$, $(a,b] = (a,b) \cup \{b\} \subseteq I \subseteq [a,b] \setminus \{a\} = (a,b]$, luego $I = (a,b]$;
- si $a \notin I$, $b \notin I$, $(a,b) \subseteq I \subseteq [a,b] \setminus \{a,b\} = (a,b)$, luego $I = (a,b)$.

b) I es acotado superiormente pero no inferiormente. Sea $a = \sup I$, con lo que $(-\infty, a) \subseteq I \subseteq (-\infty, a]$, pues para cada $z \in I$ es $z \leq a$ y dado $z < a$, existe $y \in I$ con $z < y$ (por definición de supremo) y existe $x \in I$ con $x < z$ (I no está acotado inferiormente), que con la hipótesis del enunciado da $z \in I$. En consecuencia,

- si $a \in I$, $(-\infty, a] = (-\infty, a) \cup \{a\} \subseteq I \subseteq (-\infty, a]$, luego $I = (-\infty, a]$;
- si $a \notin I$, $(-\infty, a) \subseteq I \subseteq (-\infty, a] \setminus \{a\} = (-\infty, a)$, luego $I = (-\infty, a)$.

Los restantes casos se analizan de forma análoga: en *c)* se obtiene $I = (a, +\infty)$ o $I = [a, +\infty)$, donde $a = \inf I$, y en *d)* queda $I = \mathbb{R}$. □

1.3. Apéndice: expresión decimal de un número real

En esta exposición seguimos esencialmente la que puede verse en [APOSTOL2, págs. 13–15].

Los números reales de la forma

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n},$$

donde a_0 es un número entero no negativo y a_1, ..., a_n son enteros que satisfacen $0 \leq a_j \leq 9$, se expresan normalmente de la forma $a_0, a_1 a_2 \ldots a_n$. Esta expresión se llama representación decimal finita. Estos números son racionales, pero no todo número racional tiene una representación decimal finita (véase [APOSTOL2, págs. 13–14]).

Proposición 1.3.1 (aproximaciones decimales finitas de los números reales). *Dado un número real $x \geq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$ existe un decimal finito $r_n = a_0, a_1 a_2 \dots a_n$ tal que*

$$r_n \leq x < r_n + \frac{1}{10^n}.$$

En consecuencia,

$$x = \sup\{r_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Demostración. Para construir los r_n basta tomar $a_0 = [x]$, $a_k = [10^k x] - 10[10^{k-1}x]$, $1 \leq k \leq n$ (ver detalles en [APOSTOL2, págs. 14–15]).

Por otra parte, x es cota superior de $\{r_n : n \in \mathbb{N}\}$ por construcción, y es la menor de las cotas superiores porque si $y < x$ es posible encontrar un $n \in \mathbb{N}$ de manera que $10^n > \dfrac{1}{x-y}$ (¿por qué?) y para este n es $r_n > y$ (¿por qué?). □

Que x es el supremo del conjunto $\{r_n : n \in \mathbb{N}\}$ suele expresarse poniendo

$$x = a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$$

y se dice entonces que $a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$ es una ***representación decimal infinita*** de x. En ciertos casos, es posible obtener el mismo supremo para dos representaciones decimales infinitas distintas, ver [APOSTOL2, pág. 15].

Para $x = 0$, suele tomarse como representación decimal $0,00\dots0\dots$; y para $x < 0$, se parte de una representación decimal de $-x$ y se coloca un signo $-$ delante.

Hay una presentación más geométrica y computacional en [LAX, sec. 1.3].

Si en lugar de potencias de 10 se utilizan potencias de 2, se obtiene la ***representación binaria*** de los números reales; la ***representación hexadecimal*** resulta al tomar potencias de 16. Ambas son muy importantes (especialmente la primera) en relación con los ordenadores. Pueden verse detalles en [ABELLANAS-GALINDO, cap. 3] y [BARTLE-SHERBERT, pág. 73 y sigs.].

1.4. Ejercicios

Ejercicio 1.1. Sea $x \in \mathbb{R}$. Demostrar que si $|x| \leq \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, entonces $x = 0$. ¿Qué números reales x cumplen que $x \leq \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$?

Ejercicio 1.2. Decir si cada una de las siguientes expresiones es cierta o falsa:

a) $\sum\limits_{j=1}^{30} j^4 = \sum\limits_{j=0}^{30} j^4$ b) $\sum\limits_{j=0}^{100} 2 = 200$

c) $\sum\limits_{j=1}^{20} (2 + j^2) = 2 + \sum\limits_{j=1}^{20} j^2$ d) $\sum\limits_{k=1}^{100} k^2 = \left(\sum\limits_{k=1}^{100} k\right)^2$

Ejercicio 1.3. Expresar con notación de sumatorio:

a) $\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \dfrac{1}{10\cdot 11}$ b) $1 + 40 + 900 + 16000 + 250000 + 3600000$

c) $1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4$ d) $a^5 + a^4 b + a^3 b^2 + a^2 b^3 + ab^4 + b^5$

e) $a^5 - a^4 b + a^3 b^2 - a^2 b^3 + ab^4 - b^5$ f) $a_0 x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4$

Ejercicio 1.4. Sabiendo que $\dfrac{1}{j(j+1)} = \dfrac{1}{j} - \dfrac{1}{j+1}$, hallar la suma de $\sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{1}{j(j+1)}$.

Ejercicio 1.5. Hallar las sumas siguientes ($n \in \mathbb{N}$):

a) $\sum\limits_{j=1}^{n} (2j-1)$ (usar la igualdad $j^2 - (j-1)^2 = 2j-1$, $j \in \mathbb{N}$).

b) $\sum\limits_{j=1}^{n} j$ (apoyarse en *a)*).

Ejercicio 1.6. Probar que $x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1})$ para cada $n \in \mathbb{N}, x, y \in \mathbb{R}$. Escribir el segundo miembro con notación de sumatorio. Esta expresión recibe el nombre de ***fórmula*** o ***ecuación ciclotómiica***.

Ejercicio 1.7. Deducir de la ecuación ciclotómica la suma de $\sum\limits_{j=0}^{n} x^j$, $x \neq 1$. Hacer operaciones en la expresión $(1-x) \sum\limits_{j=1}^{n} jx^j$ para deducir la suma de $\sum\limits_{j=1}^{n} jx^j$, $x \neq 1$. Análogamente en $(1-x) \sum\limits_{j=1}^{n} j^2 x^j$ para deducir la suma de $\sum\limits_{j=1}^{n} j^2 x^j$, $x \neq 1$.

Ejercicio 1.8. Demostrar por inducción las propiedades siguientes ($n \in \mathbb{N}$):

a) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ b) $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k+4}{k(k+1)(k+2)} = \dfrac{n(3n+7)}{2(n+1)(n+2)}$.

c) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$. d) $\sum\limits_{j=1}^{n} ar^{j-1} = \dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$ $(r \neq 1)$.

e) $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{n}$. f) $\sum\limits_{k=n+1}^{2n} \dfrac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2n} \dfrac{(-1)^{k+1}}{k}$.

Ejercicio 1.9. Deducir de las ecuaciones

$$1 = 1$$
$$1 - 4 = -(1+2)$$
$$1 - 4 + 9 = 1 + 2 + 3$$
$$1 - 4 + 9 - 16 = -(1+2+3+4)$$

una fórmula general sencilla que incluya las anteriores como casos particulares, y demostrarla mediante el principio de inducción.

Ejercicio 1.10. Probar la fórmula del ***binomio de Newton***: para cada $x, y \in \mathbb{R}$ y cada $n \in \mathbb{N}$,

$$(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j y^{n-j}.$$

Deducir de ella que:

a) $1 + n + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-1} + 1 = 2^n$;

b) $1 - n + \binom{n}{2} + \cdots + (-1)^{n-1} \binom{n}{n-1} + (-1)^n = 0$.

Ejercicio 1.11. Demostrar que si un conjunto A de números naturales contiene a n_0 y además cumple $n \in A \Rightarrow n+1 \in A$, entonces A contiene a $\{n \in \mathbb{N} : n \geq n_0\}$. ¿Puede asegurarse siempre la igualdad de estos conjuntos?

Ejercicio 1.12. Demostrar que $7^{2n+1} - 48^n - 7$ $(n \in \mathbb{N})$ es divisible por 48.

Ejercicio 1.13. Demostrar que $2^{2n} + 15n - 1$ $(n \in \mathbb{N})$ es múltiplo de 9.

Ejercicio 1.14. ***Desigualdad de Bernoulli***: probar que para todo $x > -1$ y todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica $(1+x)^n \geq 1+nx$.

Ejercicio 1.15. Probar las siguientes desigualdades para $n \in \mathbb{N}$:

a) $n! > 2^{n-1} \quad (n \geq 3)$ b) $(2n)! < 2^{2n}(n!)^2$

c) $\sqrt{n + \sqrt{n-1+\cdots+\sqrt{2+\sqrt{1}}}} < \sqrt{n}+1$

Ejercicio 1.16. Sean $x, y > 0$ y para cada $k, n \in \mathbb{N}$, sea $\alpha_{k,n} = \sum\limits_{j=0}^{n} j^k \binom{n}{j} x^j y^{n-j}$.

a) Probar, mediante la fórmula del binomio de Newton, que $\alpha_{1,n} = nx(x+y)^{n-1}$.

b) Hallar $\alpha_{2,n}$. Sugerencia: calcular antes $\beta_{2,n} = \sum\limits_{j=0}^{n} j(j-1)\binom{n}{j} x^j y^{n-j}$.

c) Obtener un procedimiento para calcular $\alpha_{k,n}$ para cualesquiera $k, n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 1.17. ***Desigualdad de Cauchy-Schwartz***: probar que si $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$, entonces

$$\left(\sum_{j=1}^{n} x_j y_j\right)^2 \leq \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} y_j^2\right).$$

Deducir que, si $a^2+b^2 = c^2+d^2 = 1$, entonces $|ac+bd| \leq 1$.

Ejercicio 1.18. Sea $P(n)$ la propiedad $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \dfrac{(2n+1)^2}{8}$.

a) Probar que si $P(n)$ es cierta, entonces $P(n+1)$ es cierta.

b) Discutir la afirmación: *se deduce por inducción que $P(n)$ es cierta para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Ejercicio 1.19. Decidir para qué números naturales n es cierta la desigualdad $2^n > n^2$. Demostrarlo por inducción.

Ejercicio 1.20. Comparar n^{n+1} y $(n+1)^n$ para $n \in \mathbb{N}$, y enunciar y demostrar qué desigualdad se verifica entre ambos números.

Ejercicio 1.21. Probar por inducción que si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son números reales positivos tales que $a_1 a_2 \ldots a_n = 1$, entonces $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq n$. Deducir de aquí que si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son números reales no negativos cualesquiera, entonces

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n},$$

es decir, su media aritmética es siempre mayor o igual que su media geométrica.

Ejercicio 1.22. Probar que para todo número natural n es $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < 3$.

Ejercicio 1.23. Demostrar que el cardinal del conjunto de las partes de un conjunto que tiene n elementos es 2^n.

Ejercicio 1.24. Hallar las soluciones de las desigualdades siguientes:

a) $2x^2+9x+6 \geq x+2$ b) $x+\dfrac{1}{x} < 1$ c) $\dfrac{x}{x+5} < 0$

d) $\dfrac{3x^2-1}{1+x^2} > 0$ e) $\dfrac{2x-1}{3x+2} \leq 1$ f) $\dfrac{2x^2+9x+6}{x+2} \geq 1$

g) $\dfrac{x^2-4x+4}{1+x^3} > 0$ h) $\dfrac{x-1}{3x+4} \leq \dfrac{3x+2}{x}$

Ejercicio 1.25. Resolver las ecuaciones:

a) $|x^2-5x+6| = -(x^2-5x+6)$ b) $\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| = \dfrac{x-1}{x+1}$

c) $|(x^2+4x+9)+(2x-3)| = |x^2+4x+9|+|2x-3|$ d) $|x-1|\,|x+1| = 0$

e) $|x-1|\,|x+2| = 3$

Ejercicio 1.26. Resolver las siguientes desigualdades:

a) $|x-1|+|x+1| < 1$ b) $|x-5| < |x+1|$ c) $|3x-5| < 3$

d) $|x^2-1| < 1$ e) $|x^2-x+1| > 1$ f) $1 < |x-\frac{1}{2}| < 2$

g) $x-|x| > 2$ h) $|x^2-x|+x > 1$ i) $\big|x+|x-1|\big| < 2$

j) $\frac{1}{1+|x-1|} < |x-2|$ k) $-1 \leq \frac{|x^3-1|}{x-1} \leq 2$

Ejercicio 1.27. Estudiar para qué números reales x se cumple:

a) $\dfrac{|x|+1}{x} < 1$ y $\dfrac{-2|x|+1}{x} < 1$ b) $\big|2x-|2x-1|\big| = -5x$

Ejercicio 1.28. Calcular el supremo y el ínfimo, si existen, de los siguientes conjuntos, indicando si son máximo o mínimo respectivamente:

a) $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ b) $\{\frac{2n+1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$

c) $\{n \pm \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ d) $\{x \in \mathbb{Q} : |x| < \sqrt{2}\} \cup \{x \in \mathbb{Q} : \frac{1}{x-5} > 7\}$

e) $\{\frac{1}{n} + (-1)^n : n \in \mathbb{N}\}$ f) $\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x \in \mathbb{R} : n^2x^2 - n(3n-1)x + (2n^2-3n-2) = 0\}$

g) $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ h) $\{(-1)^n \frac{n^2+1}{n+1} : n \in \mathbb{N}\}$

i) $\{x \in \mathbb{R} : x^2+x-1 < 0\}$ j) $\{x \in \mathbb{R} : x < 0,\ x^2+x-1 < 0\}$

k) $\{x \in \mathbb{R} : x^2+x+1 \geq 0\}$ l) $\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$

m) $\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ n) $\bigcap_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}\right]$

Ejercicio 1.29. Sean A un conjunto, $s = \sup A$ y $\varepsilon > 0$. ¿Se puede asegurar que existe algún $a \in A$ tal que $s - \varepsilon < a < s$? En caso afirmativo, demostrarlo. En caso negativo, dar un contraejemplo y modificar las desigualdades anteriores para que sea cierto.

Ejercicio 1.30. Sean A y B dos conjuntos no vacíos, acotados, de números reales.

a) Demostrar que si $A \subseteq B$, entonces

$$\sup A \leq \sup B, \qquad \text{ínf} A \geq \text{ínf} B.$$

b) Probar que si $x \leq y$ para todos los $x \in A$, $y \in B$, entonces

$$\sup A \leq y \text{ para todo } y \in B; \quad x \leq \text{ínf} B \text{ para todo } x \in A$$

y por lo tanto $\sup A \leq \text{ínf} B$.

c) Demostrar que si $\sup A < \text{ínf} B$, entonces que $a < b$ para todos los $a \in A$, $b \in B$. Justificar si es cierto el recíproco.

Ejercicio 1.31. a) Sean A y B dos conjuntos acotados de números reales. Definimos el conjunto $A + B = \{x + y : x \in A,\ y \in B\}$. Demostrar que

$$\sup(A+B) = \sup A + \sup B, \qquad \text{ínf}(A+B) = \text{ínf} A + \text{ínf} B.$$

b) Sean $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subseteq \mathbb{R}$, $B = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\} \subseteq \mathbb{R}$, y consideremos el conjunto

$$C = \{x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n\}.$$

Demostrar que

$$\sup C \leq \sup A + \sup B, \qquad \text{ínf} C \geq \text{ínf} A + \text{ínf} B.$$

Dar algún ejemplo que muestre que las desigualdades pueden ser estrictas.