UNIVERSIDAD AUTONOMA DE SAN LUIS POTOSI

# Facultad de Ciencias

## TAREA 2

En los ejercicios del 1 al 8, demostrar cada igualdad usando el principio de inducción, $\forall n \in \Im^{+}$

1.- $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

2.- $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$

3.- $\dfrac{1}{1(2)} + \dfrac{1}{2(3)} + \dfrac{1}{3(4)} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$

4.- $1(4) + 4(7) + \cdots + (3n-2)(3n+1) = n(3n^2 + 3n - 2)$

5.- $x^n + x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots 1 = \dfrac{x^n - 1}{x - 1}, x \neq 1$

6.- $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1) = \dfrac{1}{3} n(n+1)(n+2)$

7.- $1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 4^2 + \cdots + n(n+1)^2 = \dfrac{n(n+1)(n+2)(3n+5)}{12}$

8.- $3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ es divisible por **17**

9.- ¿Para cuales enteros no negativos **n** se cumple $n^2 < 2^n$ ?

10. Números primos:

a) Mediante el algoritmo de Eratóstenes, hallar los números primos menores que 150.
b) Señalar, en la lista anterior, todas las parejas de primos mellizos.
c) Determinar si los siguientes números son primos: 203, 1 003, 5 123, 42 534.
d) Comprobar la conjetura de Goldbach en los números: 50, 98, 102, 144.

11. Mediante el algoritmo de Euclides, calcular el máximo común divisor, y con él, el mínimo común múltiplo de las parejas de números: (45, 75), (102, 222), (666, 1 414), (20 785, 44 350), (332 720 058, 212 788 065).

12. Factorizar en números primos: 144, 8 162, 111 111, 9 699 690.

13. En un desfile militar va a participar una compañía de 1 000 soldados. El comandante de la misma recibe las siguientes instrucciones:

    - En una parte del recorrido han de ir formados en fila de 7.
    - En otra parte, con calles más estrechas, hay que cambiar a formación de 4.
    - Finalmente, en la avenida principal, deben formar en filas de 11.

    Y en ningún momento debe haber filas incompletas. ¿Cuantos soldados de la compañía pueden participar en el desfile?

14. La Ruta-20 y la Ruta-1 de camiones coinciden en un punto de su recorrido. Un camión de la Ruta-20 tarda 84 minutos en completar su recorrido. Otro camión de la Ruta-1 emplea 54 minutos en el suyo. Si estos dos camiones coinciden a las 12:00, ¿a qué horas volverán a coincidir?

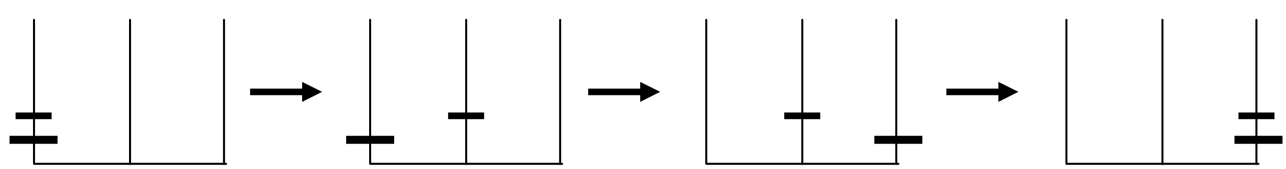
15. Una fábrica vende tornillos grandes y pequeños. Los grandes en lotes de 750 tornillos, los pequeños en lotes de 1185 tornillos. Una ferretería compra 11 lotes de tornillos grandes y 5 de pequeños, y quiere venderlos en cajas mixtas que contengan de los dos tipos.

    Hallar todas las posibles formas de agrupar los tornillos en cajas, todas iguales. ¿Cuál es el máximo número de cajas mixtas que pueden hacer? ¿Y el mínimo?

16. Un satélite, A, en orbita ecuatorial, tiene un período de 180 minutos. Otro satélite, B, en orbita circumpolar, de 300 minutos. Un centro de seguimiento se encuentra justo en la vertical del punto donde sus orbitas se cruzan.
    a) ¿Cada cuanto tiempo pasan los dos satélites a la vez por encima del centro de seguimiento?
    b) La antena del centro envía automáticamente señales de localización para ambos satélites cada *T* minutos. Calcular *T* de forma que cada satélite reciba, al menos, una señal en cada orbita, y que cada vez que coincidan los dos sobre el centro de seguimiento reciban una señal.

17.- Si solo existen monedas de 3 y de 5 pesos. Se expresarían las cantidades así: 8= 3(1)+5(1), 9= 3(3)+5(0), 10= 3(0)+5(2), 11= 3(2)+5(1), ... Demostrar que $\forall$**n** entero con **n** $\geq$ **8** existen enteros no negativos **t** y **c** tales que **n = 3t + 5c**

18.- En el juego de la Torre  de Hanoi se inicia con 1, 2, 3, ..., n discos de diferente tamaño colocados en la primera de tres torres. El objetivo es llegar a tener todos los discos en otra de las torres en el menor número de movimientos,. De cada dos discos en una misma torre, el más pequeño siempre debe estar arriba del más grande. Cada movimiento consiste en trasladar uno de los discos de una torre a otra. Demostrar que, para n discos, se puede terminar el juego en $2^n$-1 movimientos.



19.- Hallar el error en la siguiente argumentación:

Teorema

En todo conjunto de **n** personas, todas son de igual sexo, $\forall \mathbf{n} \in \mathfrak{I}$

Demostración por inducción.

- Para n = 1

  Es claro que todas (solo una) son de igual sexo.

- Suponemos que para k personas se cumple el enunciado ( hipótesis de inducción)

- Para k + 1 personas

  Llamamos **A** a una de ellas, **B** a otra y **X** a cualquiera de las demás. Si consideramos a todas, menos a **A** como las k personas de igual sexo, en especial **B** y **X** son de igual sexo. Si tomamos a todas menos a **B**, llegamos a que **A** y **X** son de igual sexo. También **A** y **B** son de igual sexo, luego todas son de igual sexo.

20.- Si $\mathbf{m - 1 \geq r \geq 2}$, donde **m** y **r** son enteros, pruebe que

$$2\binom{m}{r} - \binom{m-1}{r} - \binom{m+1}{r} + \binom{m-1}{r-2} = 0$$

21.-Hallar el valor de $(2-\sqrt{1-x})^6 + (2+\sqrt{1-x})^6$

22.- Hallar los coeficientes de $\mathbf{x^{32}}$ y $\mathbf{x^{-17}}$ en $\left(x^4 - \frac{1}{x^3}\right)^{15}$

23.- Hallar el término independiente de x en $\left(x - \frac{1}{x^2}\right)^{3n}$

24.- Demostrar que $\forall n \in \mathfrak{I}^+$

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$

a) Usando Inducción
b) Sin usar inducción

25.- Si la probabilidad de un producto mal fabricado es 0.5%. Calcular la probabilidad de que al fabricar 20 productos resulten:

a) Solo 0, 1, 2, 3 malos
b) solo la mitad buenos

26.- Calcular el cociente y el residuo al dividir

a) 0 entre –3
b) 12 entre 59
c) 59 2ntre 12
d)-59 entre 12
e) 59 entre –2
f) –59 entre -12

27.- a) Dividir 102 entre 72 para obtener un cociente **q** y un residuo **r**. Dividir el divisor 72 entre el residuo **r**. Continuar hasta que ya no sea posible. ¿Qué relación tiene el último residuo distinto de cero con los números originales? ¿Cómo lo puede comprobar?

b) Expresar este último residuo **m** en la forma **m = 108x + 72y** con **x, y** enteros.

28.-Definición: Si $a,b \in \Im$, $a$ divide a $b$, que se escribe $a \mid b$ si y solo si $\exists q \in \Im \ni \quad aq = b$ Demostrar que

a) $1 \mid a \quad \forall a \in \Im$ b) $a \mid 0 \quad \forall a \in \Im$

c) Si $a \mid b$ y $a \mid c$ entonces $a \mid (bs + ct) \quad \forall s,t \in \Im$

29.- Continuar escribiendo la tabla hasta el 113.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| . | . | . | . | . | . |
| 108 | 109 | 110 | 111 | 112 | 113 |

a) Circula el 2 y tacha los otros múltiplos de 2, igual para el 2, 5, 7.

b) ¿Porqué los números circulados o sin tachar son los números primos de la lista?

30.- a) Calcular el máximo común divisor de 45 y 75,denotado por (45,75)

b) Calcular el mínimo común múltiplo de 45 y 75, denotado por [45,75]

c) ¿45(75) = (45,75)[45,75]? ¿Por qué?

31.- Demostrar que $\forall n \in \Im^{+}, \quad \exists \quad n$ números compuestos (no primos) consecutivos

32.- Hallar todos los números primos que sean, simultáneamente suma de dos primos y diferencia de dos primos.