I. ALGEBRA DE BOOLE

I.1 DEFINICION.

El Algebra de Boole es toda clase o conjunto de elementos que pueden tomar dos valores perfectamente diferenciados, que designaremos por 0 y 1 y que están relacionados por dos operaciones binarias denominadas suma (+) y producto (.) (la operación producto se indica generalmente mediante la ausencia de símbolo entre dos variables lógicos.)

Cumplen las siguientes **Propiedades**:

a) Ambas operaciones son conmutativas, es decir si a y b son elementos del álgebra, se verifica:

$$a + b = b + a \qquad\qquad a \,.\, b = b \,.\, a$$

b) Dentro del álgebra existen dos elementos neutros, el 0 y el 1, que cumplen la propiedad de identidad con respecto a cada una de dichas operaciones:

$$0 + a = a \qquad\qquad 1 \,.\, a = a$$

c) Cada operación es distributiva con respecto a la otra:

$$a \,.\, (b + c) = a \,.\, b + a \,.\, c \qquad\qquad a + (b \,.\, c) = (a + b) \,.\, (a + c)$$

d) Para cada elemento a del álgebra existe un elemento denominado a , tal que:

$$\bar{a} + \bar{a} = 1 \qquad\qquad a \,.\, a = 0$$

Este postulado define realmente una nueva operación fundamental que es la inversión o complementación de una variable. La variable a se encuentra siempre en un estado binario contrario al de a. La tabla de verdad de la inversión o complemento, es:

a	$\bar{a}$
0	1
1	0

Físicamente son varios los conjuntos que poseen dos operaciones binarias que cumplen los postulados desarrollados. Ejemplo de estos conjuntos son el álgebra de las proposiciones o juicios formales y el álgebra de la conmutación formada también por elementos que pueden tomar dos estados perfectamente diferenciados.

Los primeros circuitos de conmutación o lógicos utilizados, han sido los contactos que pueden ser empleados para memorizar más fácilmente las leyes del álgebra de Boole antes expresadas y los teoremas.

La operación ***suma*** se asimila a la **conexión en paralelo** de contactos y la operación ***producto*** a la **conexión en serie**. El inverso de un contacto es otro cuyo estado es siempre el opuesto del primero, es decir está cerrado cuando aquél está abierto y viceversa. El elemento 0 es un contacto que está siempre abierto y el elemento 1 un contacto que está siempre cerrado. Además se considera una función de transmisión entre los dos terminales de un circuito de contactos, que toma el valor 1, cuando existe un camino para la circulación de corriente entre ellos (corto circuito) y el valor 0 si no existe dicho camino (circuito abierto).

a + b   b + a

a . b   b . a

0 + a   =   a

I.2 Teoremas de Algebra de Boole

Teorema 1

Cada identidad deducida de los anteriores postulados del álgebra de Boole permanece válida si la operación + y **.** y los elementos 0 y 1 se intercambian entre sí.

Este principio, llamado de dualidad, se deduce inmediatamente de la simetría de los cuatros postulados con respecto a ambas operaciones y ambos elementos neutros.

Teorema 2

Para cada elemento **a** del álgebra de Boole se verifica:

$$a + 1 = 1 \qquad y \qquad a \,.\, 0 = 0$$

Teorema 3

Para cada elemento a del álgebra de Boole se verifica:

$$a + a = a \qquad y \qquad a \,.\, a = a$$

Teorema 4

Para cada par de elementos del álgebra de Boole a y b se verifica:

$$a + ab = a \qquad y \qquad a\,(a + b) = a$$

Esta ley se llama ***Ley de Absorción.***

Teorema 5

En un álgebra de Boole, las operaciones suma y producto son asociativas.

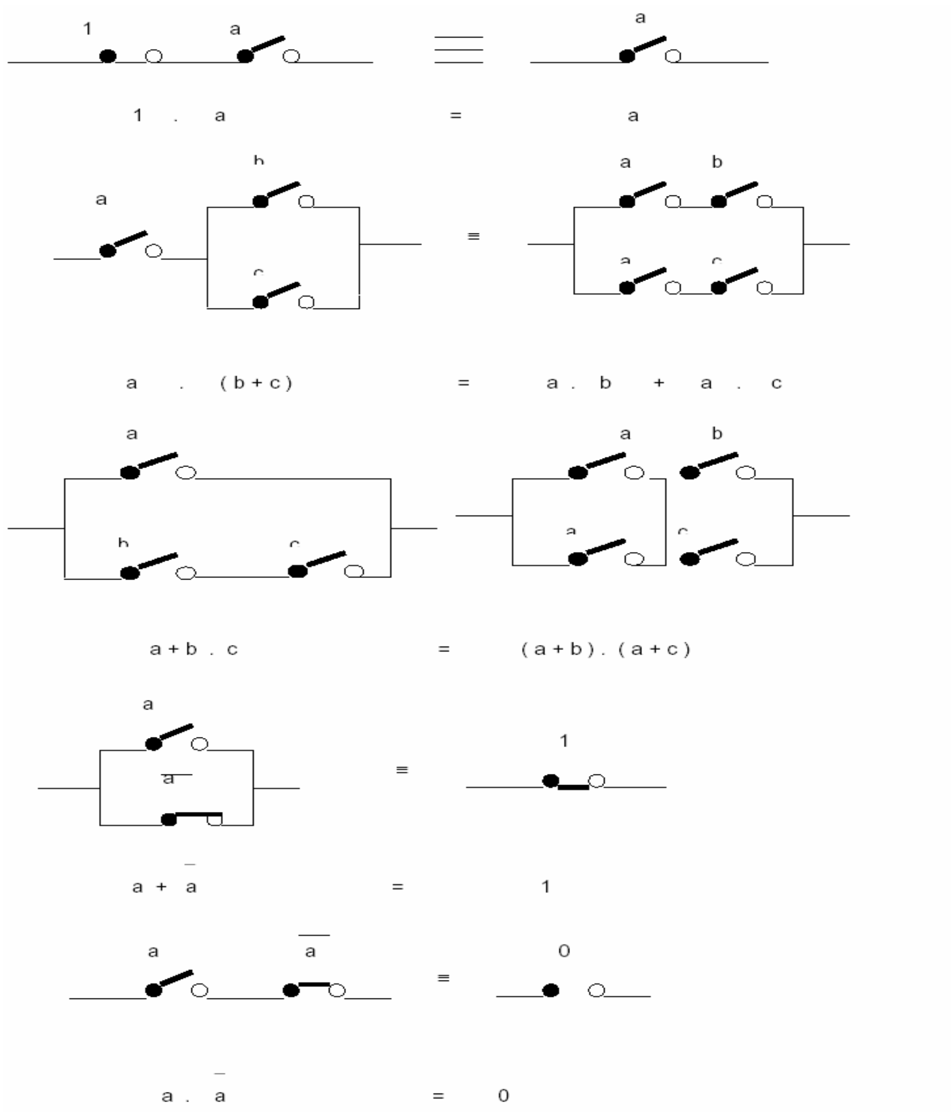
$a + (b + c) = (a + b) + c = a + b + c$

$a (b c) = (a b) c = a b c$

Teorema 6

Para todo elemento a del álgebra de Boole se verifica:

$$\overline{\overline{a}} = a$$



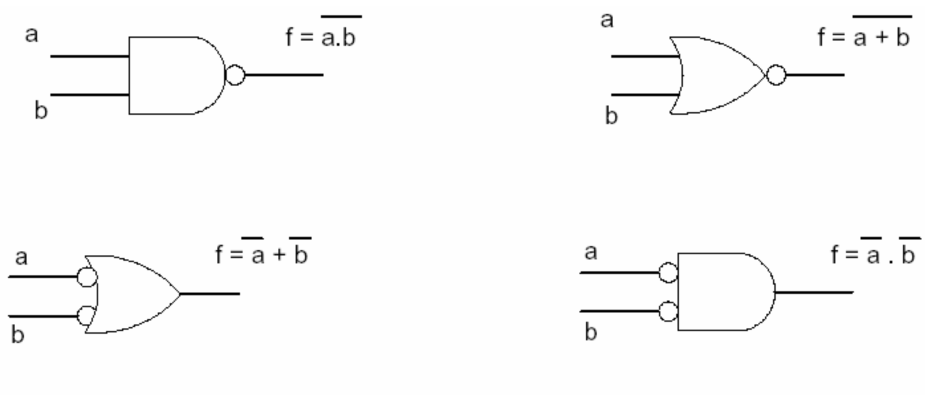
TEOREMA 7
En toda álgebra de Boole se verifica:
1) a + b + c + d + ……… = abcd

2) $\overline{a}\overline{b}\overline{c}\overline{d}$…………………… = a + b + c + d
Estas igualdades son denominadas ***Leyes de De Morgan.***

Este teorema define realmente dos nuevas funciones lógicas de gran importancia que serán utilizadas como elementos básicos para la realización de los sistemas digitales. Estas dos funciones que realizan las expresiones (1) y (2), se denominan respectivamemnte NOR y NAND.
Las tres funciones elementales: suma, producto e inversión lógica pueden ser realizadas mediante las funciones NOR y NAND.
Aplicando el teorema de De Morgan tenemos:

$\overline{\overline{ab}} = \overline{\overline{a}\ \overline{b}} = \overline{a} + \overline{b}$ $\overline{\overline{a+b}} = \overline{\overline{a+b}} = \overline{a}\ \ \overline{b}$

La inversión se representa en general mediante un circulo; por lo tanto, los símbolos de la función NOR y NAND se deducen respectivamente de las funciones OR y AND añadiéndoles un circulo:



Función NAND Función NOR

Las funciones NOR y NAND de una sola variable constituyen la función de inversión.
La realización de las funciones suma, producto e inversión con las funciones NOR y NAND se representan, mediante los símbolos estudiados:

FUNCIONES BOOLEANAS

1. DEFINICION
Una función de álgebra de Boole es una variable binaria cuyo valor es igual al de una expresión algebraica en la que se relacionan entre sí las variables binarias por medio de las operaciones básicas. Producto lógico, Suma lógica e Inversión.
Se representa una función lógica por la expresión F = f (a,b,c,….); El valor lógico de f, depende de las variables a,b,c,….
Se llama **término canónico** de una función lógica a todo producto o suma en la cual aparecen todas las variables en su forma directa o inversa. Al primero de ellos se le llama **producto canónico (minterminos)** y al segundo **suma canónica (maxterminos).**

Por ejemplo: sea una función de tres variables f(a,b,c); el término **abc** es un producto canónico y el término **a+b+c** es una suma canónica.
El número máximo de productos canónicos o sumas canónicas viene dado por las variaciones con repetición de dos elementos tomados de **n** en **n**. El número de productos o sumas canónicas de **n** variables es por lo tanto **2n**.
Para mayor facilidad de representación, cada término canónico, se expresa mediante un número decimal equivalente al binario obtenido al sustituir las variables ordenadas con un criterio determinado por un 1 o un 0 según aparezcan en su suma directa o complementaria respectivamente. Por ejemplo, los términos canónicos siguientes representarán:

$\overline{d}\ c\ b\ \overline{a} = 0110_2 = 6_{10}$

$d+\bar{c}+b+\bar{a} = 1010_2 = 10_{10}$

* La función lógica $f(a,b,c) = \bar{a}\, b\, \bar{c} + \bar{a}\, b\, c + a\, \bar{b}\, c$ se podrá representar por la expresión:

$$f(a,b,c) = \sum (2,3,5)$$

en la cual el símbolo $\sum$ representa la suma lógica.

* La función $f(a,b,c) = (\bar{a}+\bar{b}+c)\ (\bar{a}+b+\bar{c})\ (a+b+c)$ se puede representar por:

$$f(a,b,c) = \prod (1,2,7)$$

en la que $\prod$ indica el producto lógico.

Cuando una función que se expresa como una *suma de productos canónicos* o un *producto de sumas canónicas,* se dice que se encuentra en forma canónica.

Si se tiene la expresión canónica en forma de suma de productos, la expresión canónica de producto de sumas se obtiene mediante el complemento a $2^n - 1$ de los productos canónicos que no forman parte de la función.

Por ejemplo, si:

$$f = \sum{}_3\ (0,2,5)$$

Para obtener la expresión como producto; se representa como $f = \prod{}_3\ (0,1,3,4,6)$

Cuando una función lógica se presenta de una forma no canónica, su transformación en canónica resulta muy sencilla por procedimientos algebraicos.
Si se desea obtener la expresión canónica en forma de suma de productos canónicos, se operará algebraicamente aplicando las propiedades distributivas del producto con respecto a la suma, hasta obtener una expresión de suma de productos no canónicos. Para convertir cada uno de estos productos en canónicos, se le multiplica por la suma de las variables que faltan en él y sus inversas.

Ejemplo:

Sea la función: $f = a(\bar{b}+\bar{c}) + c$

Aplicando la propiedad distributiva del producto con respecto a la suma, resulta:

$$f = a\bar{b} + a\bar{c} + c$$

De acuerdo con lo explicado anteriormente:

$$f = a\bar{b}(c + \bar{c}) + ac(b + \bar{b}) + c(a + \bar{a})\ (b + \bar{b})$$

Y aplicando la propiedad distributiva del producto con respecto a la suma, resulta:

$$f = a\bar{b}c + ab\bar{c} + abc + a\bar{b}c + cab + (\bar{c}a+\bar{c}a)(b+\bar{b})$$

Suprimiendo los términos repetidos, resulta:

$$f = a\overline{b}c + a\overline{b}\overline{c} + ab\overline{c} + abc + \overline{a}bc + \overline{a}\,\overline{b}\,c$$

La función se puede expresar como: $f = \sum_3 (1,3,4,5,6,7)$

De igual forma, si se desea obtener la expresión canónica en forma de producto de sumas canónicas, se operará algebraicamente aplicando la propiedad distributiva de la suma con respecto al producto hasta obtener una expresión de producto de sumas no canónicas. Para convertir cada una de estas sumas en canónicas, se le suma el producto de cada variable que falta en ella por su inversa.

Ejemplo:

$f = a(\overline{b} + \overline{c}) + c$

Aplicando la propiedad distributiva de la suma con respecto al producto:

$f = (a + c)\ (\overline{b} + \overline{c} + c) = a + c$

$f = a + c + b\overline{b}$

Y aplicando nuevamente la propiedad distributiva de la suma con respecto al producto, tenemos:

$f = (a + \overline{b} + c)\ (a + b + c)$

$f = P3\ (5,7)$

2. TABLA DE VERDAD DE UNA FUNCION LOGICA

2.1. Definición
La tabla de verdad de una función lógica es una forma de representación de la misma, en la que se indica el valor 1 o 0 que toma la función para cada una de las combinaciones posibles de las variables de las cuales depende.

En la tabla se representa la tabla de verdad de una función de tres variables:

La deducción de la función en forma canónica por medio de la tabla de verdad resulta:

$f = \overline{a}\,\overline{b}\,c + \overline{a}\,b\,c + a\,\overline{b}\,\overline{c} + a\,b\,\overline{c} + a\,b\,c$

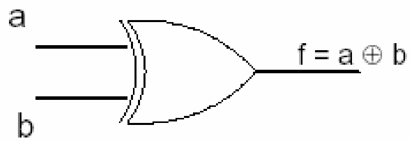
$f = \sum_3 (1,3,4,6,7) = \prod_3 (2,5,7)$

	a	b	c	f
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

Función OR-Exclusiva

La función o-exclusiva de dos variables a y b, es aquella que toma el valor 1 cuando una de las variables toma el valor uno y la otra el valor cero o viceversa.

a	b	$f = a \oplus b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0



$$f = \bar{a}\,b + a\,\bar{b} = (a + b)(\bar{a} + \bar{b})$$

Las propiedades de la función Or-exclusiva de n variables se deducen aplicándola primero a dos variables, seguidamente al resultado obtenido a una tercera variable y así sucesivamente.

Se comprueba fácilmente que la función Or-exclusiva de n variables toma el valor lógico 1, si se encuentra un número impar de ellas en estado uno, y el valor lógico 0, si es un número par de ellas el que posee el valor lógico uno:

$fo = a \oplus b \oplus c \oplus d \ldots\ldots \oplus n$
fo = 1 Si un número impar de variables está en uno.
fo = 0 Si un número par de variables está en uno.

Nos encontramos también con la función Nor-Exclusiva, cuya tabla de verdad es el complemento de la anterior (Or-Exclusiva). Se le conoce también como comparador.